Dr. Andreas Meier
Sophie-Scholl-Realschule
Kurt-Schumacher-Allee 8
92637 Weiden i. d. OPf.

Email: a.meier@realmath.de
Homepage: http://www.realmath.de

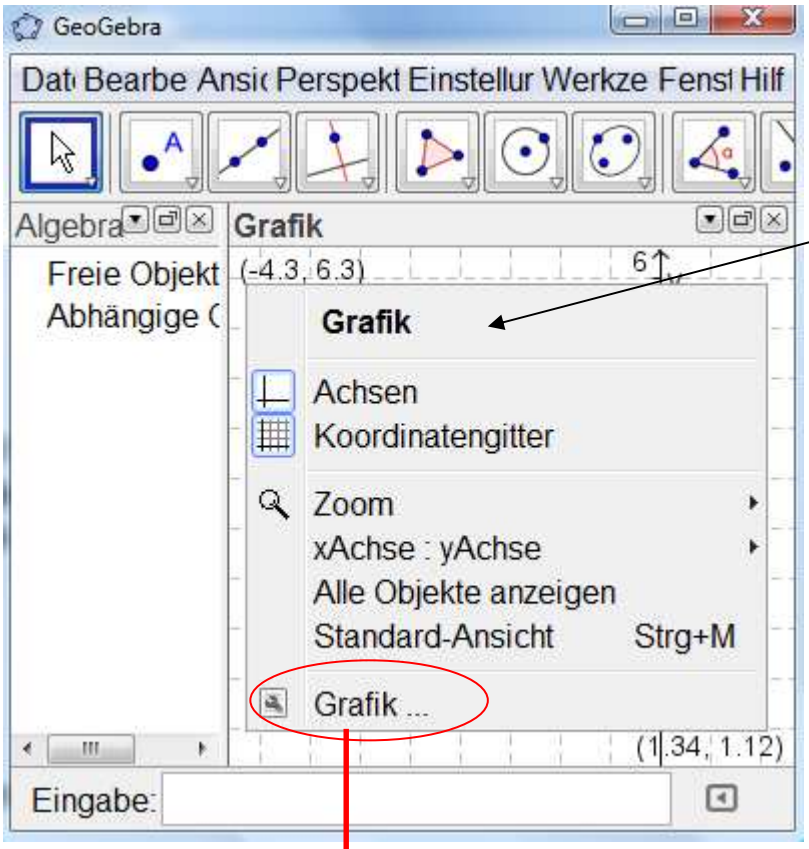
Niederbayerischer Mathematiktag für Realschulen
an der Hochschule Landshut
University of Applied Sciences
am 6. März 2012

Thema:
GeoGebra 4.0 als Lehrerwerkzeug zur Unterrichtsvorbereitung

Inhalt

1. Mein GeoGebra - GeoGebra 4.0 personalisieren

1.1 Erstellen eines Koordinatensystems in realschultypischer Erscheinung

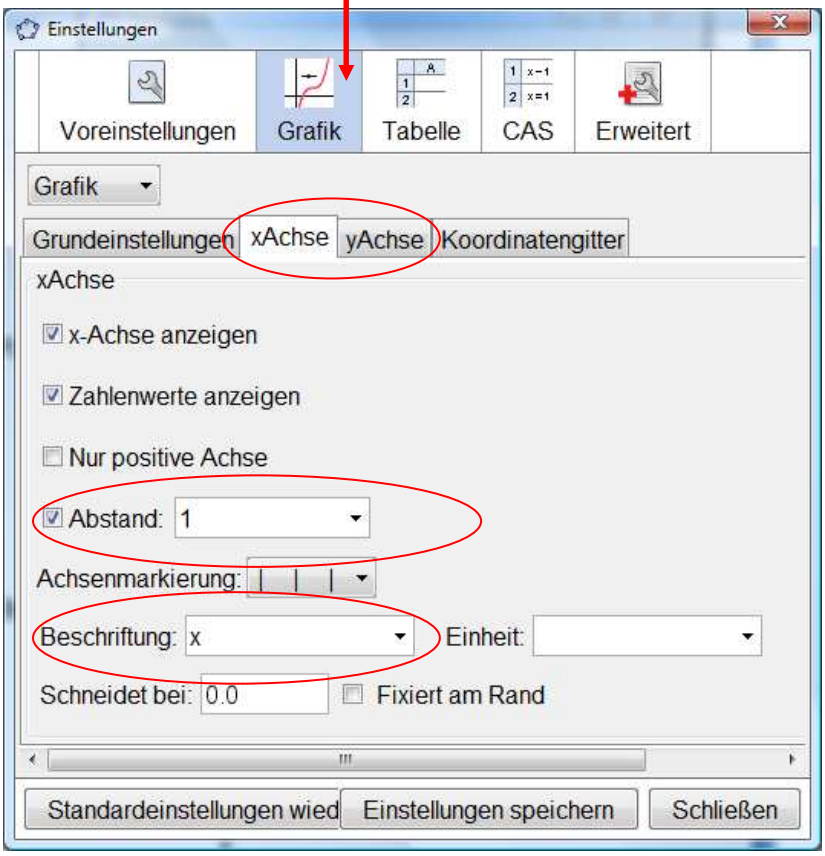


Rechte Maustaste im Bereich des GeoGebra-Grafikfensters klicken, dann erscheint das Auswahlmenü **Grafik**

Achsen
blendet die Koordinatenachsen ein bzw. aus.

Koordinatengitter
blendet das Gitter ein bzw. aus.

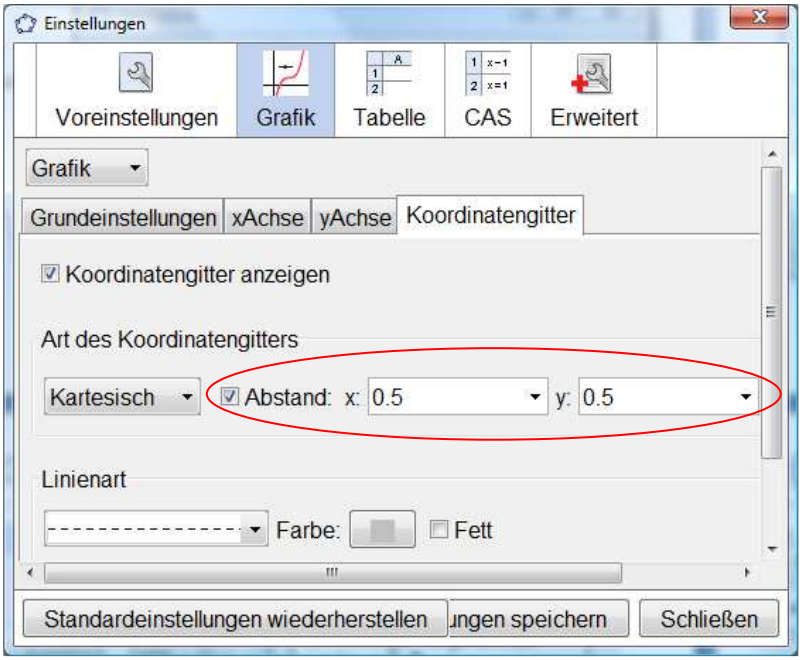
Wählt man in diesem Auswahlmenü mit der linken Maustaste den Menüpunkt Grafik, so kann man beispielsweise die ***Achsen*** und das ***Koordinatengitter*** nach eigenen Vorstellungen gestalten.



xAchse bzw. yAchse wählen

Hier können unterschiedliche Einstellungen vorgenommen werden, z.B.:
Anzahl der Zahlen auf x- und y-Achse
Beschriften der x-Achse mit x

1.2 Realschultypische Schreibweisen einstellen



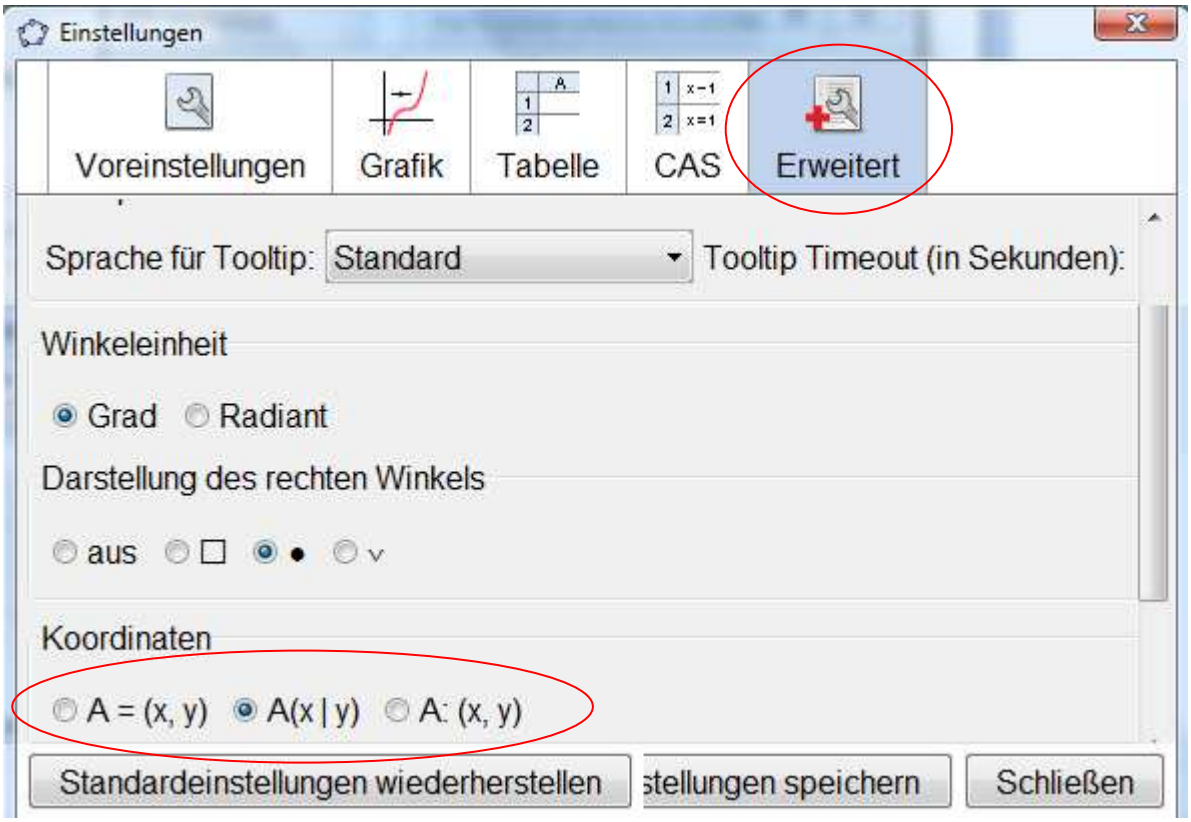
Reiter Koordinatengitter wählen

Hier können unterschiedliche Einstellungen vorgenommen werden, z.B.:

Abstand der „Kästchen“

Farbe und Linienart des Gitters

In der Rubrik <Erweitert> können noch weitere realschulspezifische Einstellungen wie etwa die Darstellung von Punkten im Koordinatensystem vorgenommen werden.



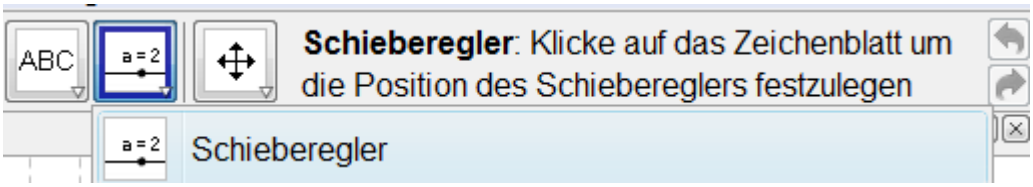
Im Anschluss daran können die einmal vorgenommenen Einstellungen gespeichert werden. Sie werden dann bei jedem Neustart von GeoGebra wieder hergestellt.

2. Funktionalität von GeoGebra 4.0 anhand einer Einbeschreibungsaufgabe

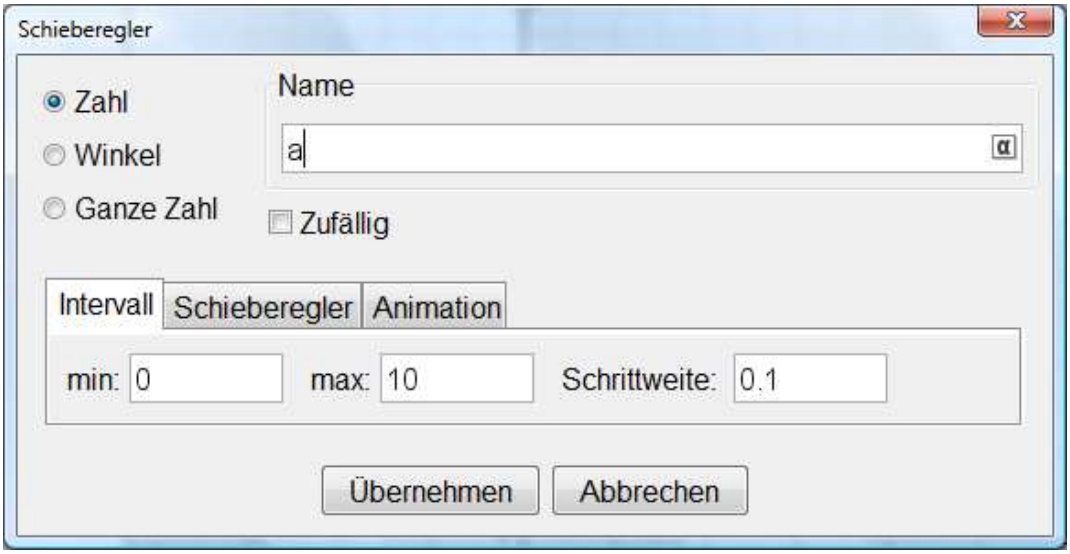
Aufgabenstellung:
Einem Rechteck ABCD mit den Seitenlängen a und b werden Vierecke PQRS einbeschrieben. Dabei liegt P auf [AB], Q auf [BC], R auf [CD] und S auf [AD]. Es gilt: $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR} = \overline{DS} = xcm$.

2.1 Koordinatengeometrisches Konstruieren

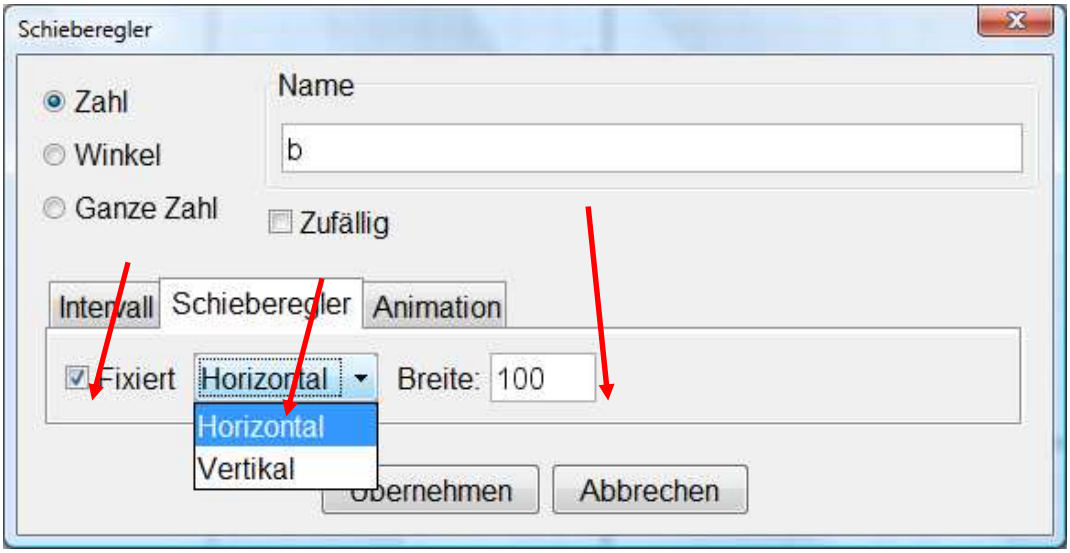
2.1.1 Erstellen der Schieberegler a und b (= Seitenlängen des Rechtecks)



Nach der Auswahl des Icons, erfolgt das Festlegen des Intervalls für a und b.

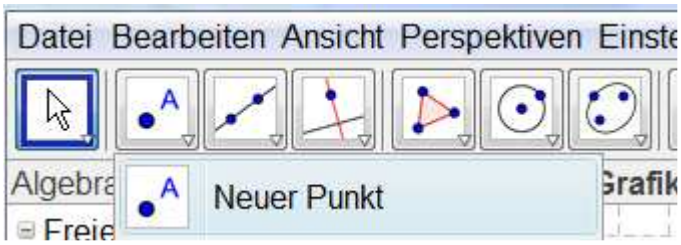


Dabei können die Ausrichtung und Breite des Schiebereglers festgelegt werden.
Achtung: Bei GeoGebra 4.0 ist die Option <Fixiert> voreingestellt.

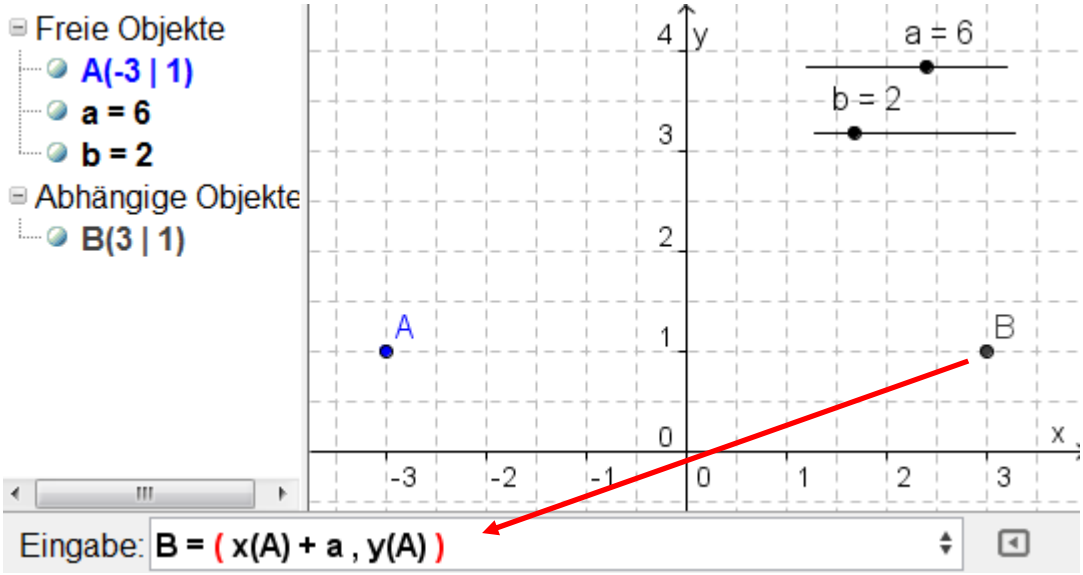


2.1.2 Zeichnen des Rechtecks mittels Koordinaten

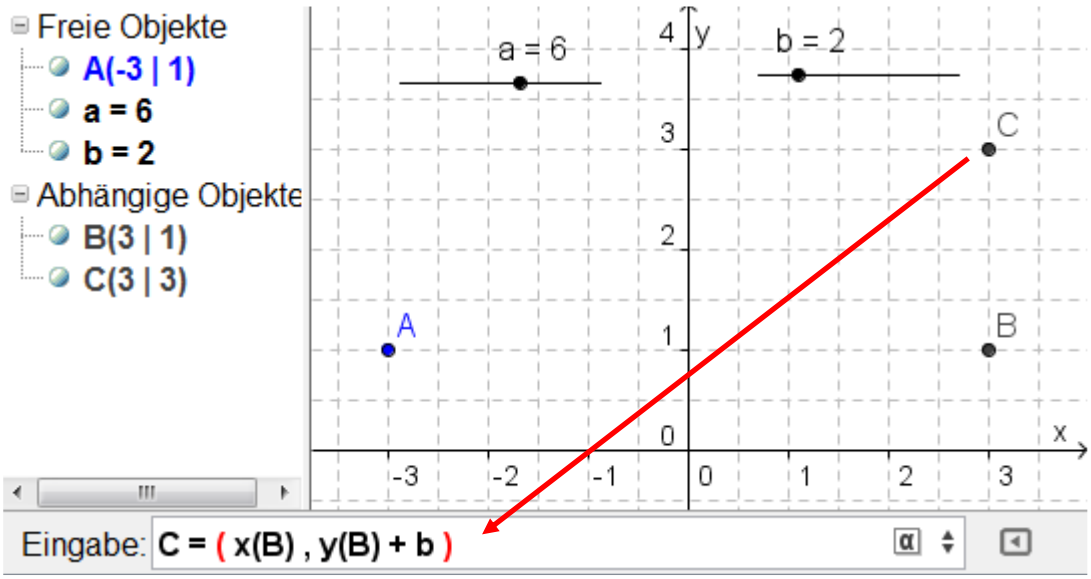
Setzen eines beliebigen Punktes mittels <Neuer Punkt>



Der Punkt B wird in Abhängigkeit der Koordinaten von A und der Länge a festgelegt.

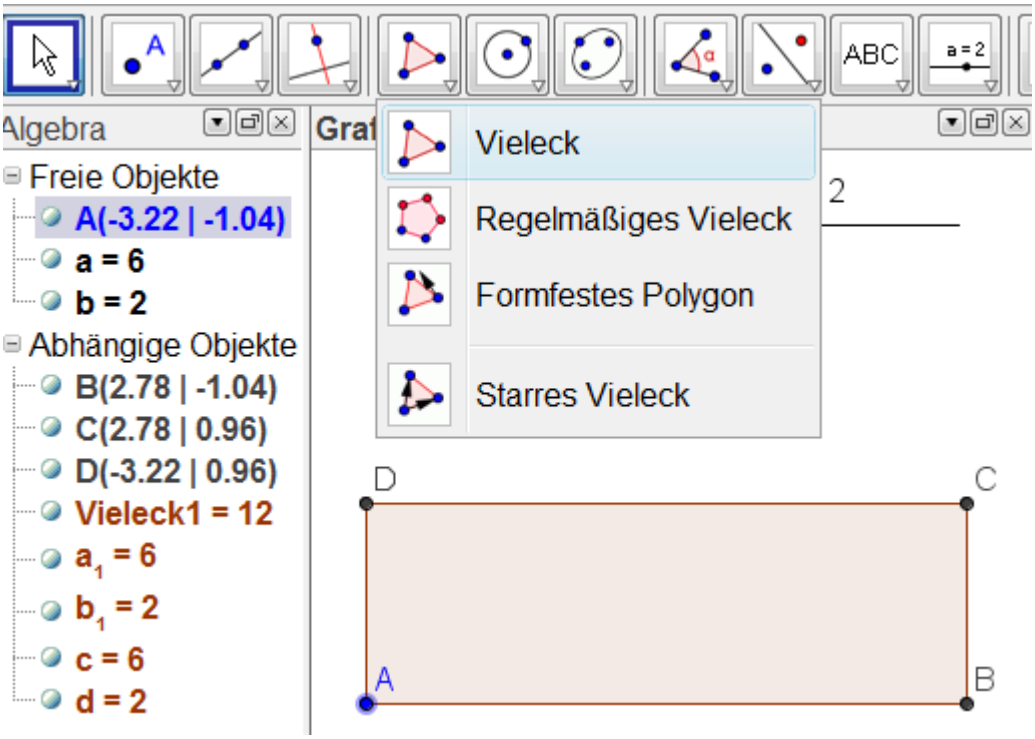


Der Punkt C wird in Abhängigkeit der Koordinaten von B und der Breite b festgelegt.



Und abschließend D mit ***D = (x(A) , y(A) + b)*** festlegen.

Auswahl des <Vieleck>-Werkzeugs und Anklicken der Punkte A, B, C D und A.

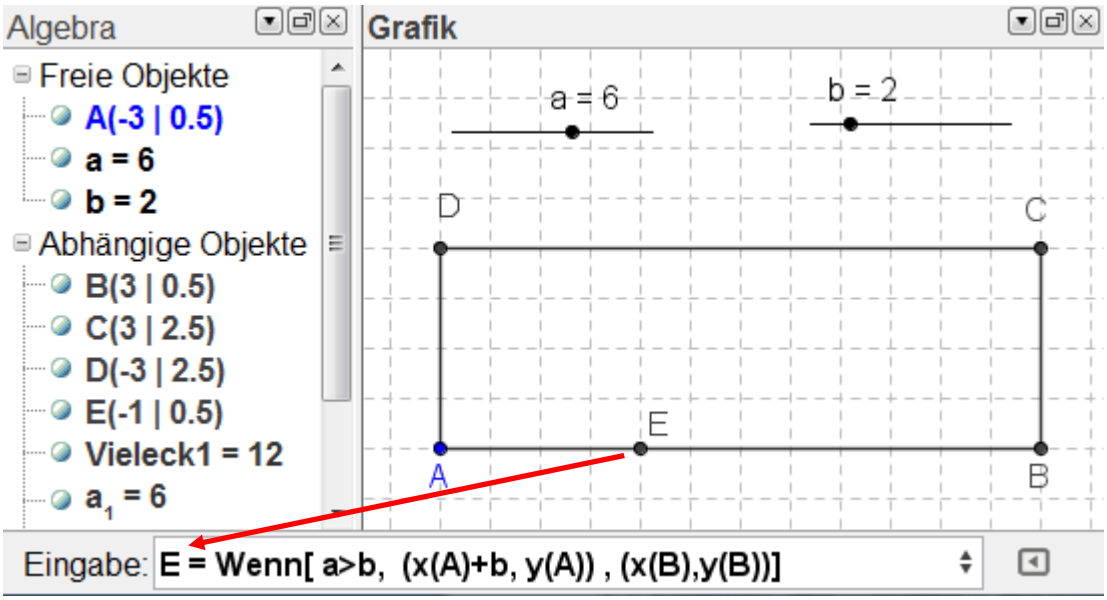


2.1.3 Konstruktion der einbeschriebenen Vierecke PQRS.

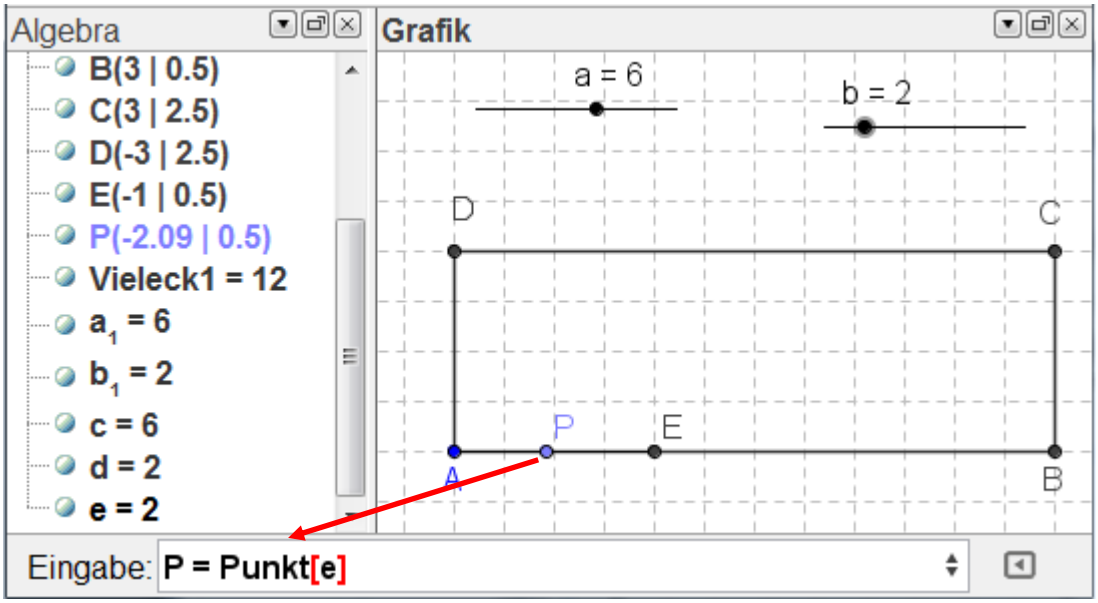
- *Erstellen des Punktes P auf [AB]*

Problem:
Da die Länge der Strecke [AP] auch von B aus auf [BC] abgetragen werden soll, muss $\overline{AP} \leq \overline{BC}$ sein. Andererseits sollte aber $\overline{AP} \leq \overline{AB}$ sein, falls die Seitenlänge b des Rechtecks größer als a ist.

Lösung:
Ein Punkt E wird auf [AB] erzeugt, der diese Bedingungen berücksichtigt. Anschließend wird eine Strecke [AE] gezeichnet und P auf diese Strecke gelegt.

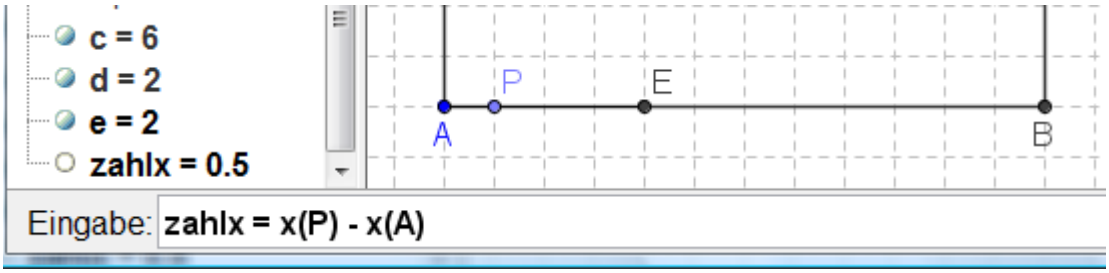


Anschließend wird mit dem <Strecke>-Werkzeug die Strecke [AE] gezeichnet und anschießend ein Punkt P auf dieser Strecke erzeugt. Z.B. ***P = Punkt[e]***.



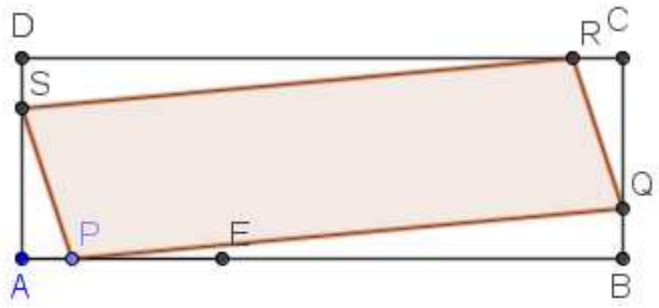
- *Abtragen von $\overline{AP}$ = xcm auf den Seiten des Rechtecks*

Dazu wir zuerst diese Zahl „zahlx“ erzeugt.
Sie ist die Differenz aus den x-Koordinaten der Punkte P und A.



Anschließend werden die Koordinaten der Punkte Q, R und S eingegeben.
Eingabe: **Q = (x(B) , y(B) + zahlx)**
Eingabe: **R = (x(C) - zahlx, y(C))**
Eingabe: **S = (x(D), y(D) - zahlx)**

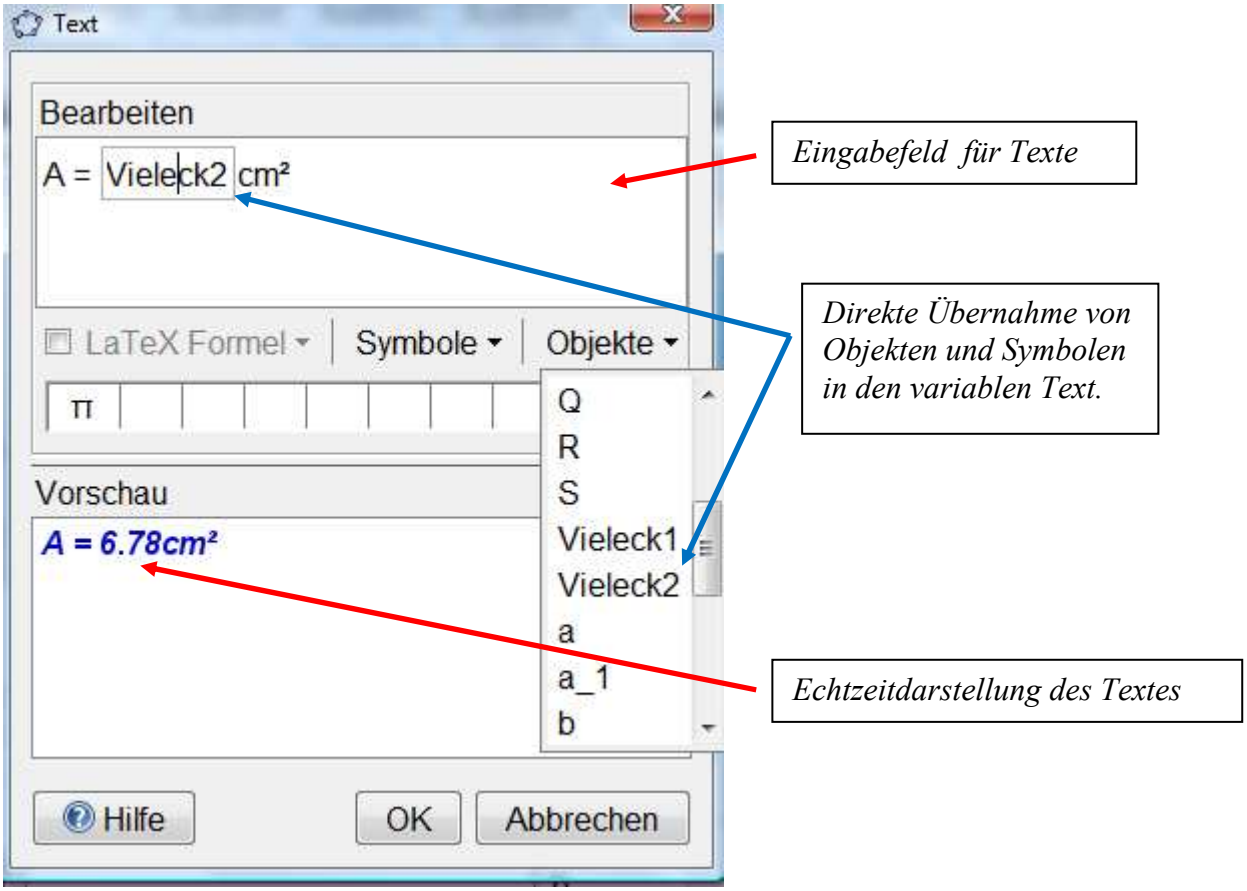
<Vieleck>-Werkzeug auswählen und die Punkte P, Q, R, S und P anklicken.



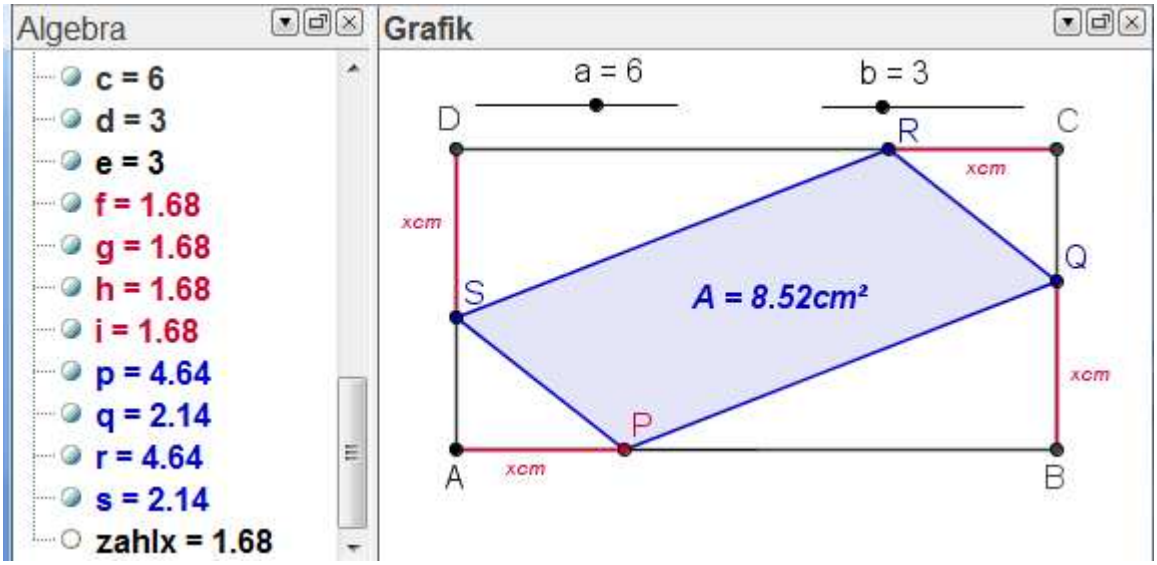
Hier endet der erste Konstruktionsabschnitt:

2.2 Dynamische Texte (incl. LaTeX und Tabellen)
Anzeigen des Flächeninhalts als variabler Text in der Zeichnung

Neue Möglichkeiten, variable Texte zu erstellen in GeoGebra 4.0



Anschließend werden die Strecken [AP], [BQ], [CR] und [DS] erzeugt, rot eingefärbt und die Texte „xcm“ an den Strecken angebracht.



Hinweis: Zeichnet man beispielsweise den Mittelpunkt von [PQ] und bindet den Text an diesen Punkt, so ist der Text unabhängig vom Viereck PQRS immer zentriert.

2.3 Funktionsgleichungen, Funktionsgraphen und Tabellen

Nun soll die Aufgabe unter funktionalen Aspekten betrachtet werden.
Die Funktionsgleichung ergibt sich aus der Überlegung, dass man den Flächeninhalt der Vierecke PQRS erhält, indem vom Flächeninhalt des Recktecks ABCD die Flächeninhalte der Dreiecke PDC, QCR, RDS und APS subtrahiert werden. Dabei sind jeweils zwei flächeninhaltsgleich.
Die Gleichung der Funktion lautet also:

Eingabe: ***f_0(x) = Vieleck1 – 2*(1/2*x* (a - x) + 1/2*x*(b - x))***
Dies erzeugt die Funktionsgleichung im Algebra-Fenster

$$f_0(x) = 18 - 2\left(\frac{1}{2}x\,(6-x) + \frac{1}{2}x\,(3-x)\right)$$

GeoGebra 4.0 ermöglicht außerdem, dass diese Funktionsgleichung auf zwei weitere Arten dargestellt werden kann:

Eingabe: ***f_1(x) = Multipliziere[f_0]***
Dies erzeugt die Funktionsgleichung im Algebra-Fenster

$$f_1(x) = 2x^2 - 9x + 18$$

Eingabe: ***f_2 = VollständigesQuadrat[f_1]***
Dies erzeugt die Funktionsgleichung im Algebra-Fenster

$$f_2(x) = 2\,(x - 2.25)^2 + 7.88$$

Ferner kann die Darstellung einer Funktion auf einen bestimmten Bereich definiert werden:
Allgemeine Syntax: ***Funktion[<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>]***

Eingabe: ***f_3 = Funktion[f_1,0,e]***

Blendet man anschließend die Funktionen f_0, f_1 und f_2 durch einen Klick auf den gefüllten Kreis aus, so wird nur mehr der Graph der Funktion f_3 dargestellt.

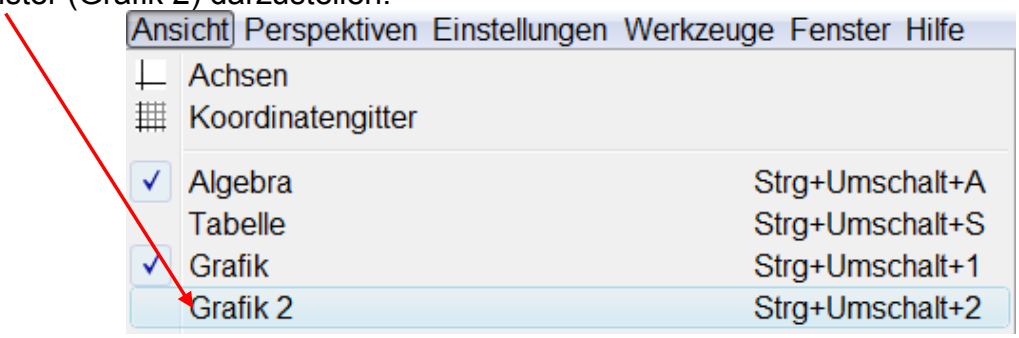
$$f_0(x) = 18 - 2\left(\frac{1}{2}x\,(6-x) + \frac{1}{2}x\,(3-x)\right)$$

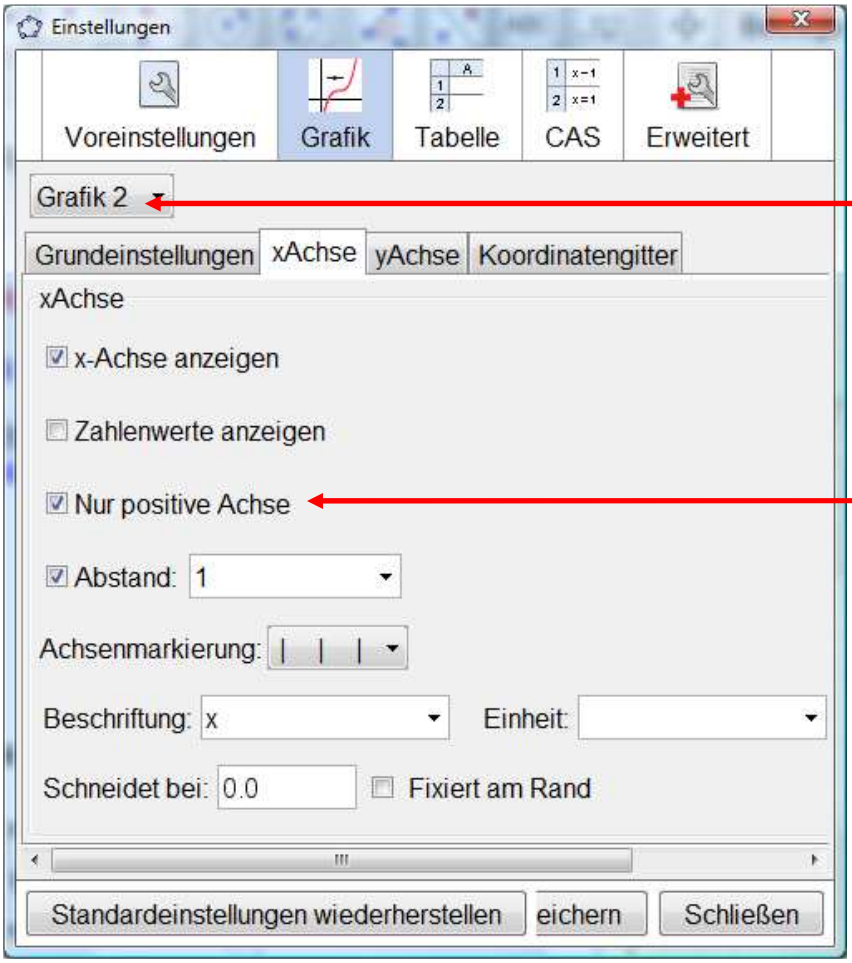
$$f_1(x) = 2x^2 - 9x + 18$$

$$f_2(x) = 2\,(x - 2.25)^2 + 7.88$$

$$f_3(x) = 2x^2 - 9x + 18$$

GeoGebra 4.0 bietet nun die Möglichkeit, den Graphen der Funktion in einem weiteren Grafikfenster (Grafik 2) darzustellen:





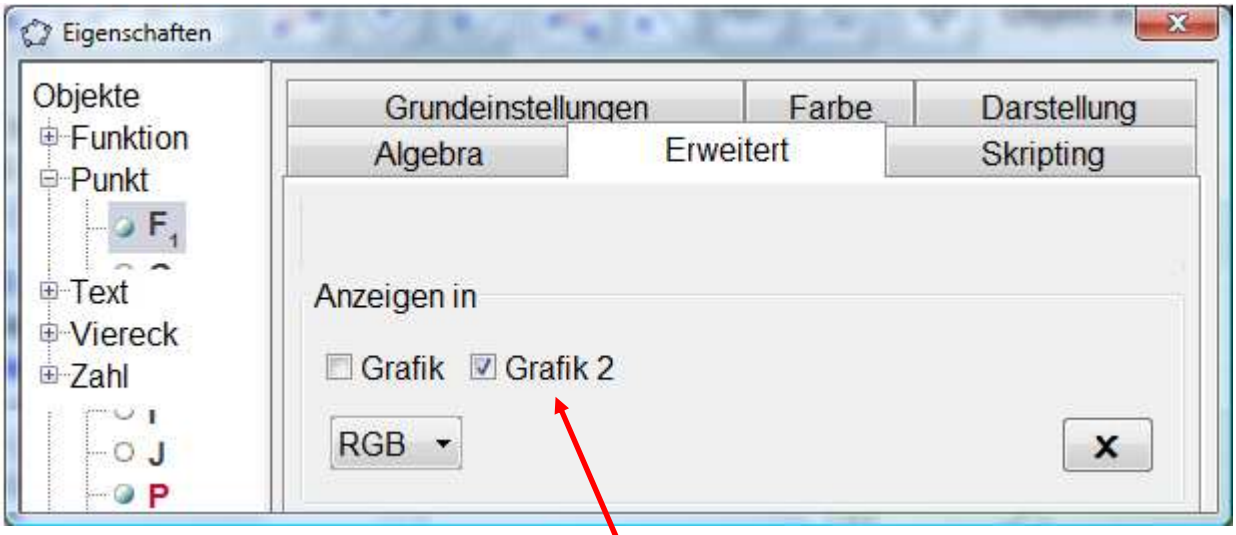
Hier können nun wie für das Grafikfenster Grafik1 Einstellungen vorgenommen werden.

Da x und der Flächeninhalt A(x) jeweils nur positive Werte annehmen kann, macht es Sinn, für die x- und y-Achse nur positive Werte zuzulassen.

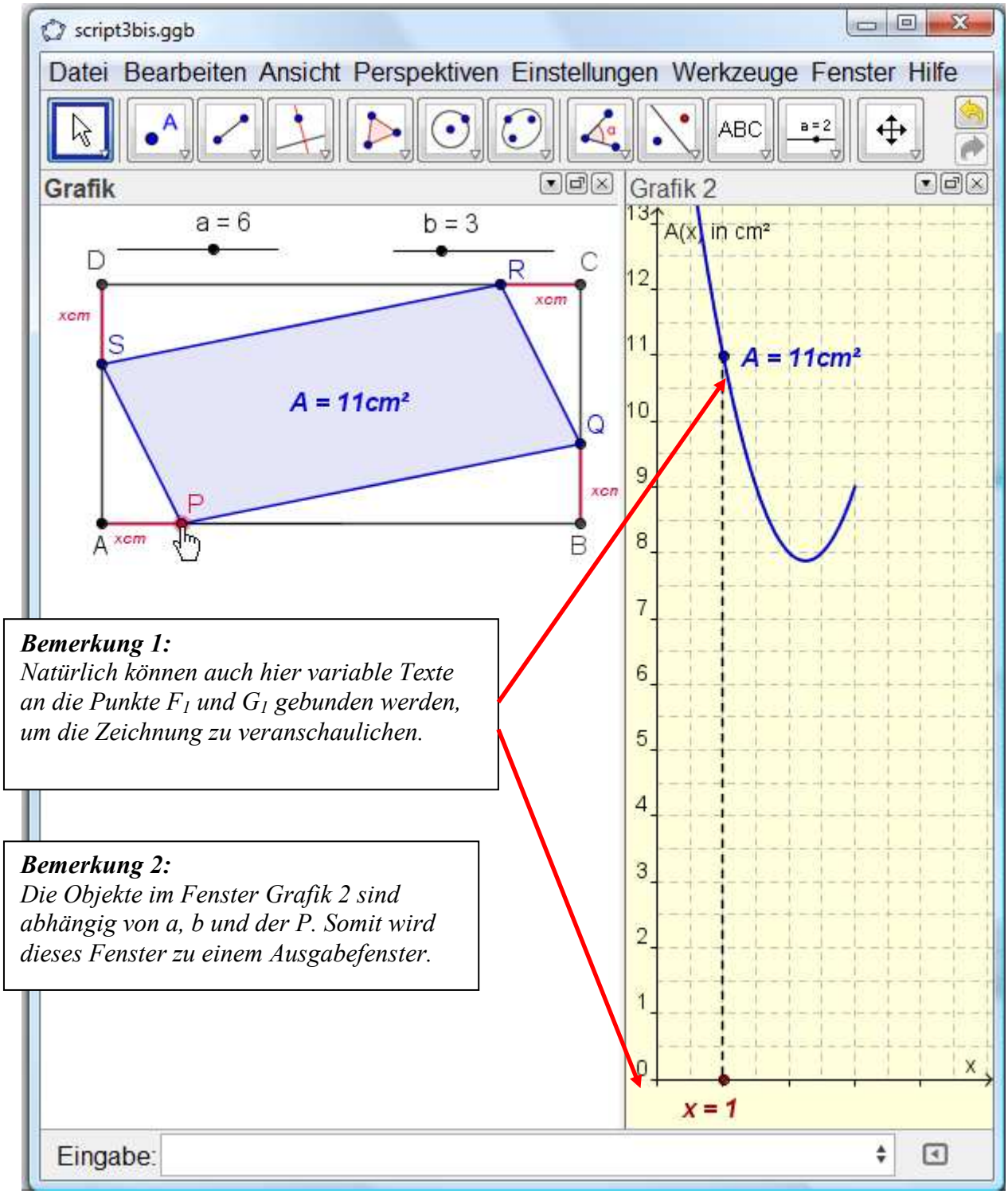
Anschließend erzeugt man einen variablen x-Wert und den zugehörigen Funktionswert

*Eingabe:**F_1 = (zahlx, 0)***

*Eingabe:**G_1 = (zahlx,f_3(zahlx))***



Anschließend werden die Punkte F_1, G_1 und f_3 jeweils nur in Grafik 2 angezeigt.



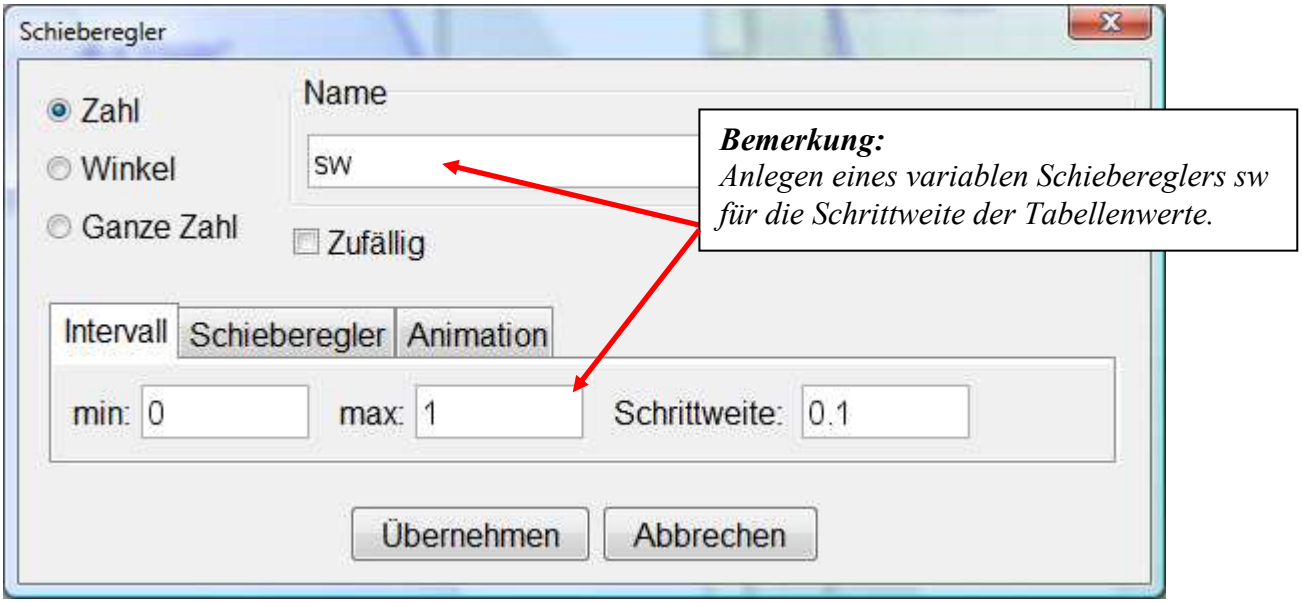
Bemerkung 1:
Natürlich können auch hier variable Texte an die Punkte F_1 und G_1 gebunden werden, um die Zeichnung zu veranschaulichen.

Bemerkung 2:
Die Objekte im Fenster Grafik 2 sind abhängig von a, b und der P. Somit wird dieses Fenster zu einem Ausgabefenster.

2.3.1 Erstellen einer variablen Tabelle

Dazu werden zuerst die Inhalte der beiden Spalten der Tabelle als Listen erzeugt.
Allgemeine Syntax: **Folge[<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert>, <Endwert>, <Schrittweite>]**

Soll die Schrittweite variabel verwendbar sein, so empfiehlt es sich, diese als Schieberegler anzulegen.



Eingabe: ***Liste1 = Folge[xwert , xwert , 0 , e , sw]***
Diese Eingabe erzeugt beispielsweise für sw = 0.2 eine Liste mit folgenden x-Werten.

Liste 1 = {0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3}

Eingabe: ***Liste2 = Folge[f_3(xwert) , xwert , 0 , e , sw]***
Diese Eingabe erzeugt eine Liste mit zugehörigen f(x)-Werten.

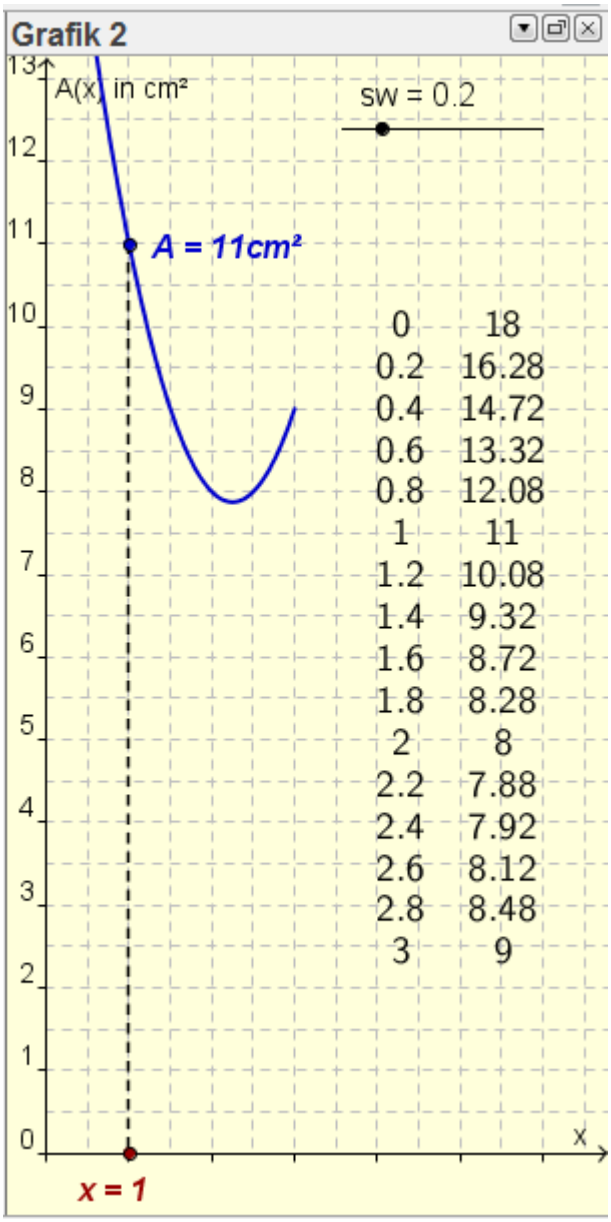
Liste 2 = {18, 16.28, 14.72, 13.32, 12.08, 11, 10.08, 9.32, 8.72, 8.28, 8, 7.88, 7.92, 8.12, 8.48, 9}

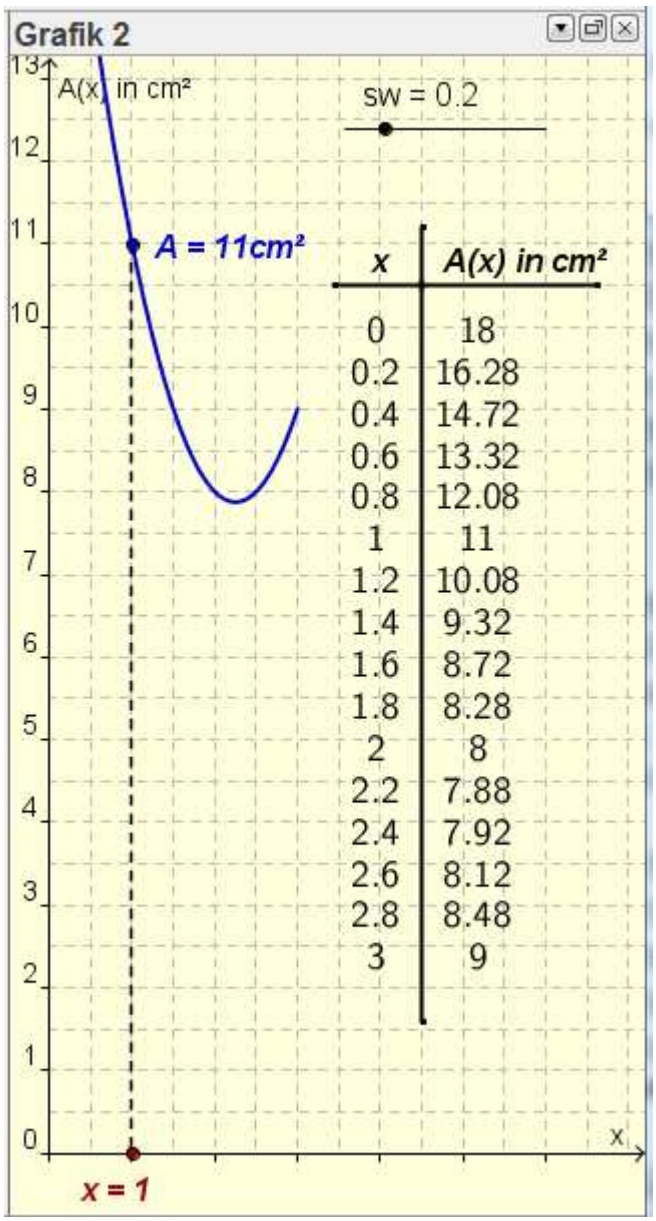
Allgemeine Syntax: TabellenText[<Liste>, <Liste>, ..., <Textausrichtung>]

Hinweis: Mögliche Eingaben für <Textausrichtung> sind "vl", "vc", "vr", "v", "h", "hl", "hc", "hr".
Standardmäßig ist die Ausrichtung "hl".
- "v" = vertikal, d.h. die Listen sind in Spalten
- "h" = horizontal, d.h. die Listen sind in Reihen
- "l" = linksbündig
- "r" = rechtsbündig
- "c" = zentriert

*Eingabe:****Text8 = TabellenText[Liste1, Liste2, "vc"]***
Diese Eingabe erzeugt die auf der folgenden Seite dargestellte Tabelle. Die linke Spalte enthält die x-Werte, die mit der Schrittweite 0.2 erzeugt wurden. In der rechten Spalte sind die zugehörigen Funktionswerte dargestellt.

Hinweis: Natürlich kann diese Darstellung je nach Lust und Laune aufgepeppt werden.
Eine mögliche Variante findet sich im zweiten Bild auf der nachfolgenden Seite.

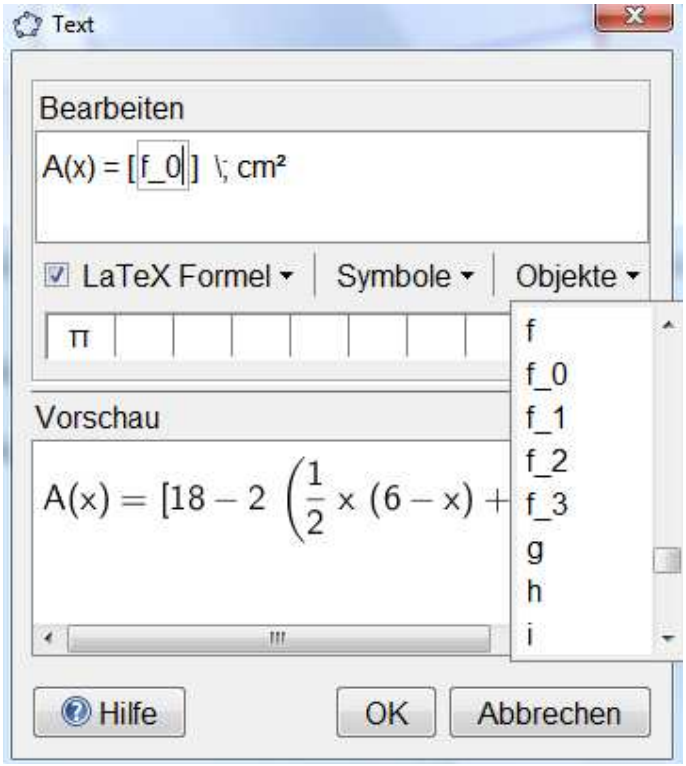


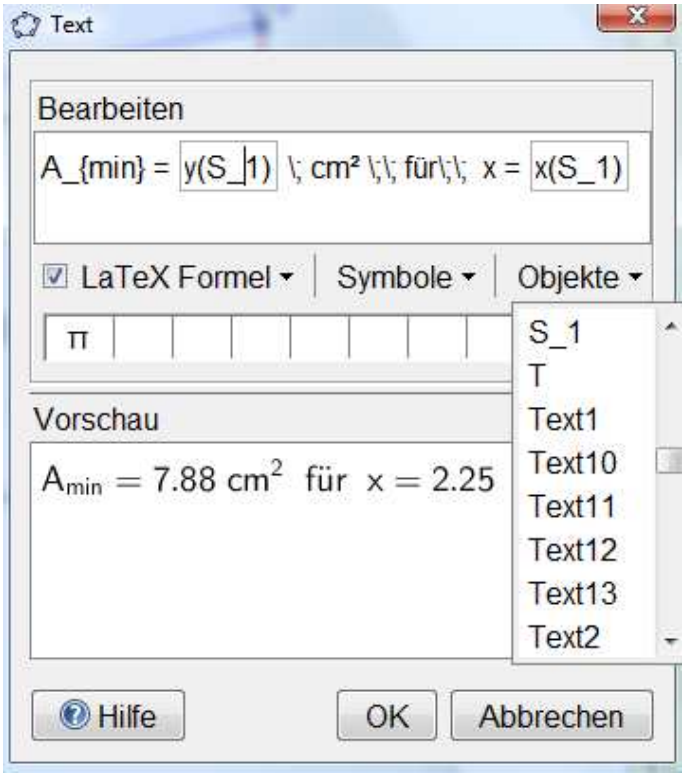


2.3.2 Erstellen variabler Funktionstexte

In diesem Abschnitt wird nun beschrieben, wie die Flächeninhaltsfunktion für die Vierecke PQRS auf unterschiedliche Art als Text angezeigt werden kann. Dazu werden die unterschiedlichen Darstellungen der Funktion für den Flächeninhalt der Vierecke PQRS f_0, f_1 und f_2 verwendet.

- $f_0(x) = 18 - 2\left(\frac{1}{2}x\,(6-x) + \frac{1}{2}x\,(3-x)\right)$
- $f_1(x) = 2x^2 - 9x + 18$
- $f_2(x) = 2\,(x-2.25)^2 + 7.88$
- $f_3(x) = 2x^2 - 9x + 18$

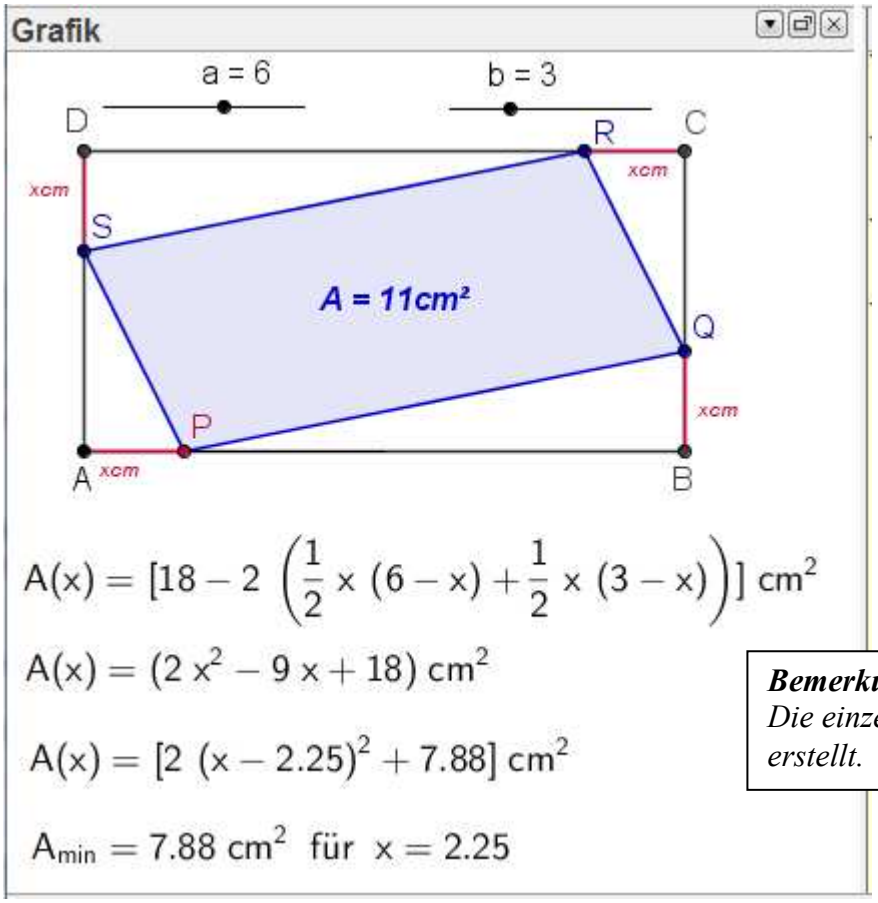




Für die Darstellung des Extremwerts muss jedoch zuerst noch der Extremwert der Funktion ermittelt werden:

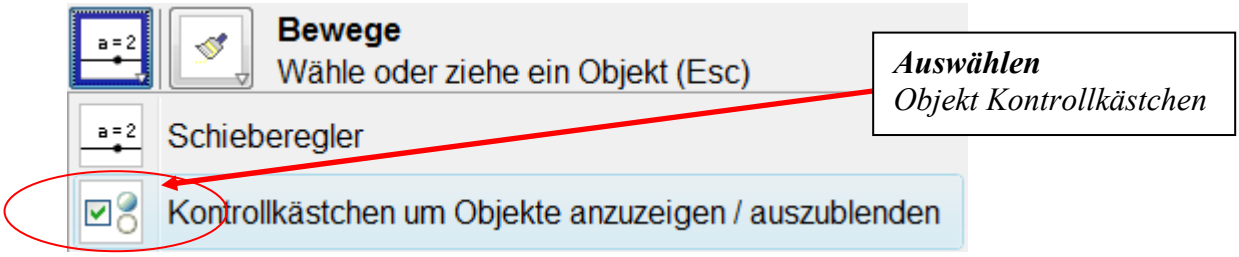
Allgemeine Syntax: **Extremum[<Polynomfunktion>]**

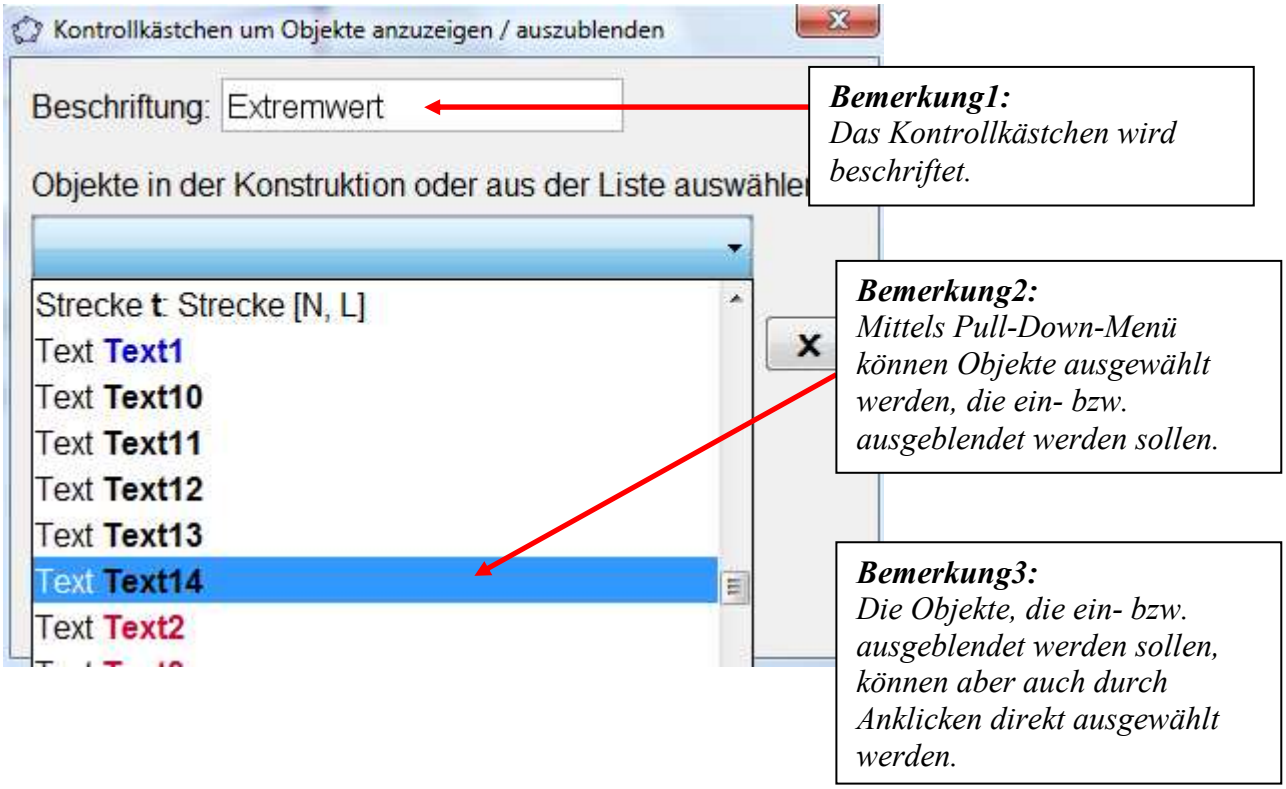
Eingabe: ***S_1 = Extremum[f_1]***



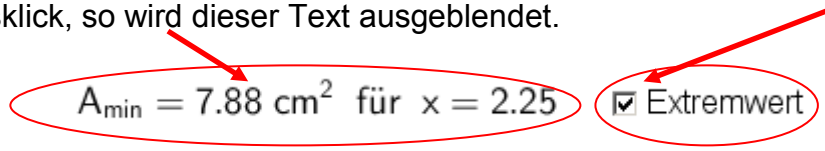
Bemerkung:
Die einzelnen Texte wurden als LaTeX erstellt.

Abschließend können nun einzelne Objekte je nach Bedarf ein- und ausgeblendet werden.





Hier wurde nun der Text „Text14“ mit dem Extremwert ausgewählt. Entfernt man das Häkchen durch einen Mausklick, so wird dieser Text ausgeblendet.

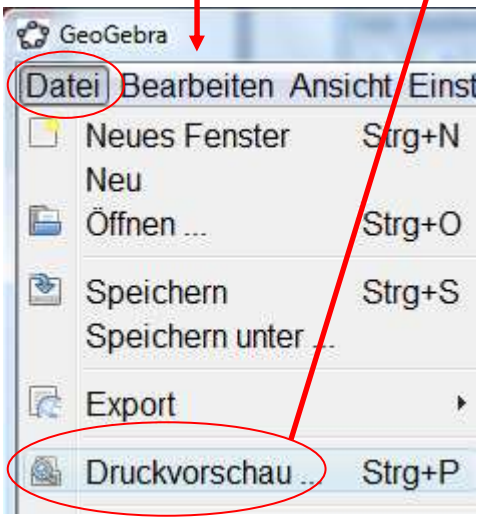


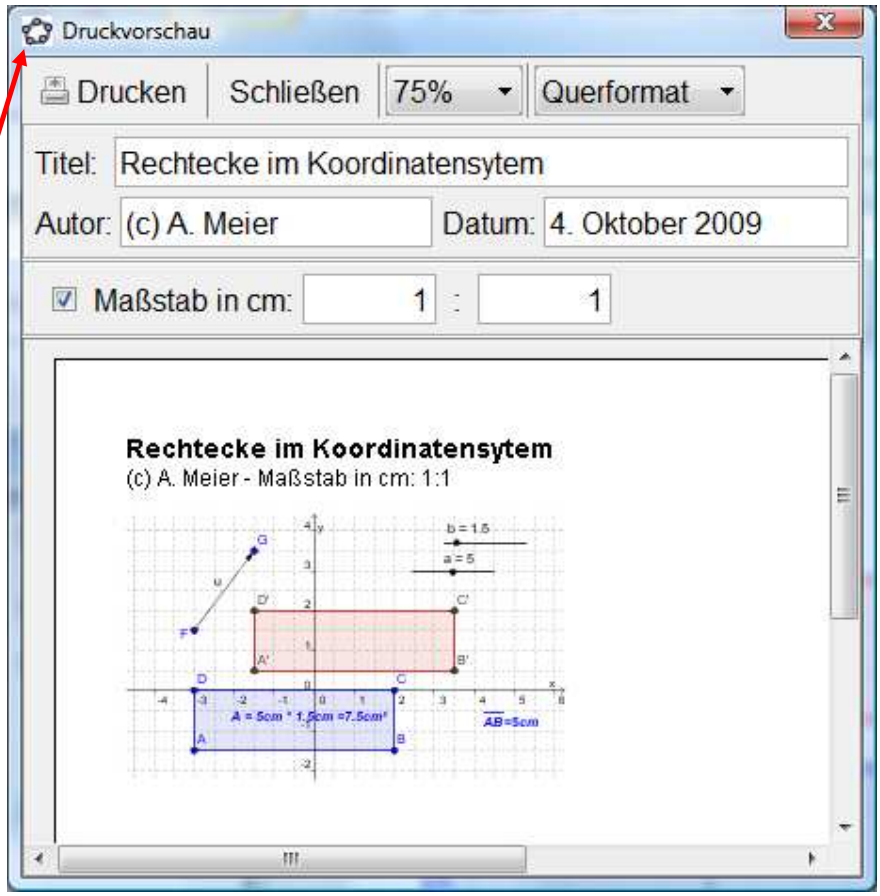
<u>Ausblick:</u> Die Länge von [BQ] und [DS] soll nicht xcm, sondern beliebig fktor*xcm sein.
Notwendige Änderungen.
Definition eines Schiebereglers ***fktor*** mit 0 < fktor < 1.5 sein.
*Q = (x(B), y(B) + **fktor** * zahlx)*
*S = (x(D), y(D) - **fktor** * zahlx)*
*E = Wenn[a > b / **fktor**, (x(A) + b / **fktor**, y(A)), (x(B), y(B))]*
*f_0(x) = Vieleck1 - 2 (1 / 2 * **fktor** *x *(a - x) + 1 / 2 * x * (b – **fktor** * x))*
Anpassen der der beiden Texte an den Strecken [BQ] und [DS]

2.4 Ausgabe: Maßstäbliches Drucken oder Erzeugen von maßstäblichen Bildern
2.4.1 Maßstäbliches Drucken

Datei wählen

Anschließend auf ***Druckvorschau*** klicken.





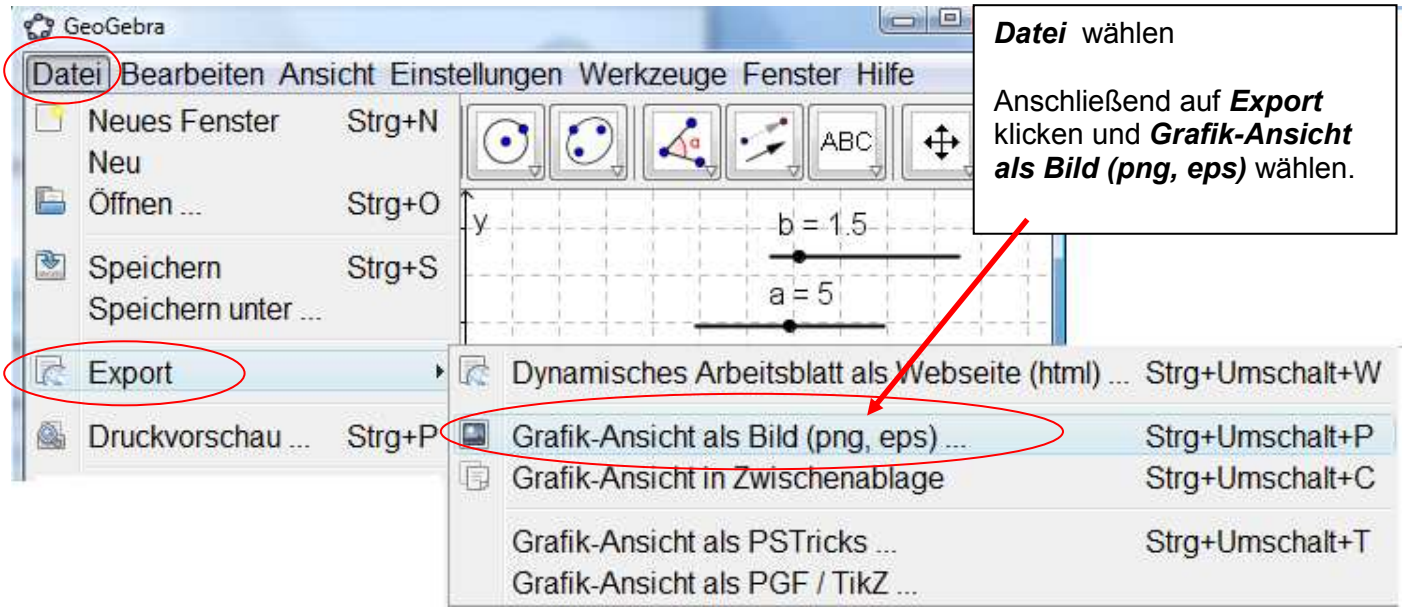
Hier kann wahlweise noch der Titel des Arbeitsblatts, der Autor, das Datum und der Maßsstab ergänzt werden. Beim Ausdruck kann Quer- oder Hochformat angegeben werden.

Anmerkung: Natürlich können Zeichnungen nur dann maßstabsgetreu ausgedruckt werden, wenn die Größe eines DIN A4 Blatts nicht überschritten wird.

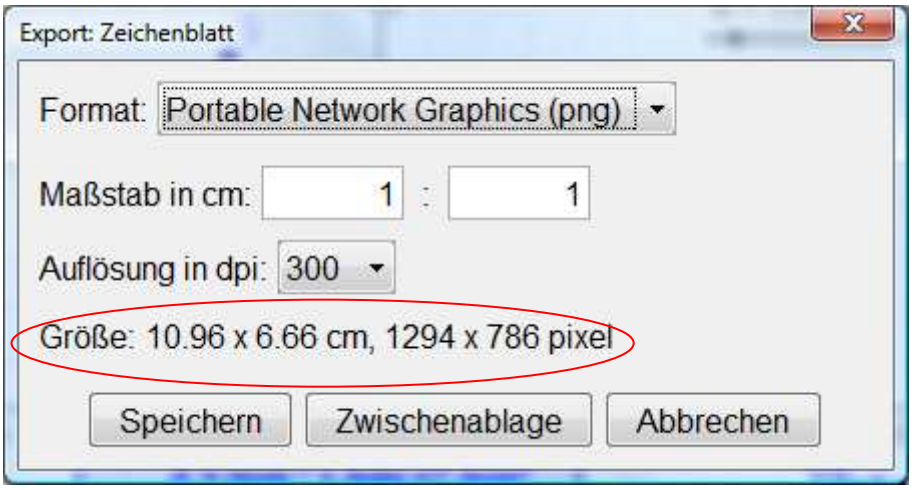
2.4.2 Erzeugen von maßstäblichen Bildern

Datei wählen

Anschließend auf ***Export*** klicken und ***Grafik-Ansicht als Bild (png, eps)*** wählen.



Anschließend erhalten Sie das unten stehende Informationsfester.



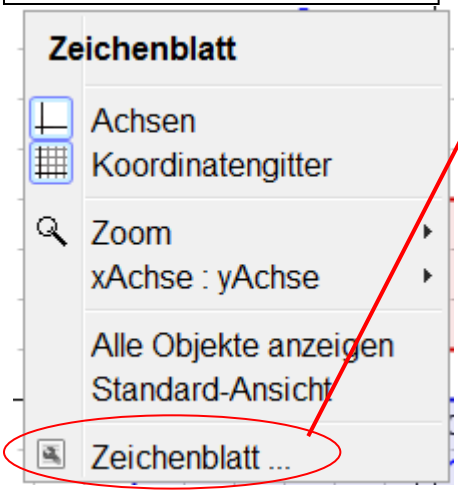
Beachten Sie bitte unbedingt die ***Bildgröße*** (***10.96 x 6.66 cm***).
Nur wenn das Bild auf eine DIN A4 Seite passt, kann dieses später in ein Textdokument maßstäblich eingebunden werden.

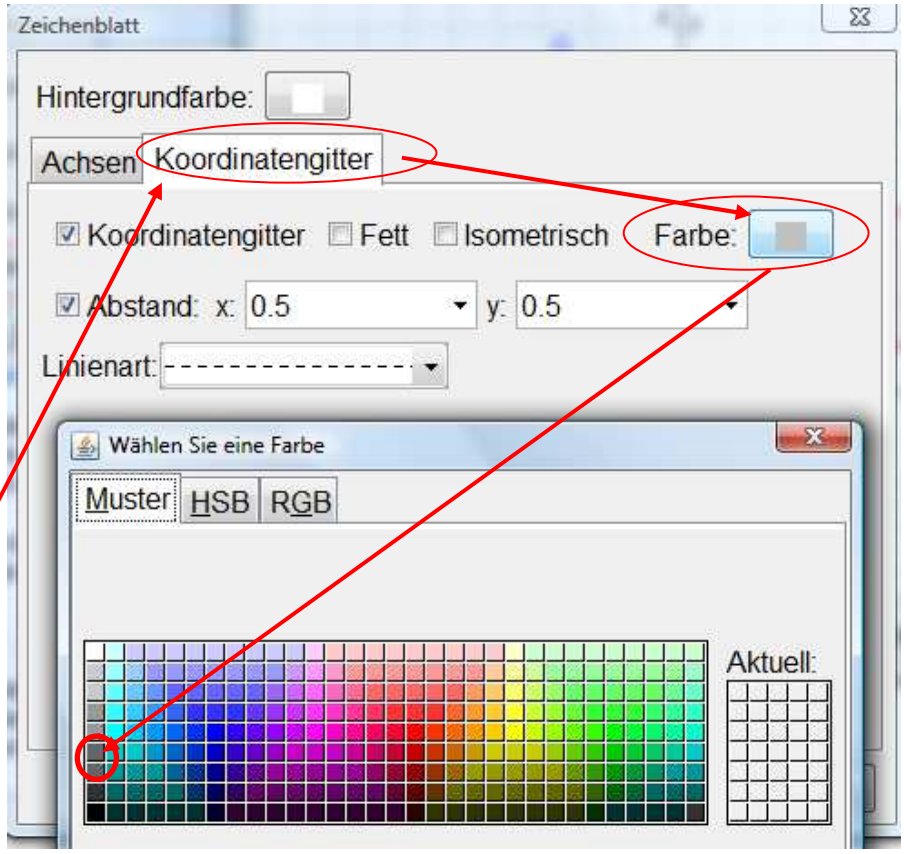
Das Bild kann nun entweder ***gespeichert*** und dann als Grafik in ein Textsystem (z.B. MS-Word) eingebunden werden oder über die Windows-***Zwischenablage*** in andere Dokumente übernommen werden.

Anmerkung:
Sollte ein Koordinatensystem zu blass auf dem Ausdruck erscheinen, so kann das Koordinatensystem vor dem Ausdruck bzw. vor der Übernahme des Bildes in die Zwischenablage farblich angepasst werden.

Mit der rechten Maustaste auf das GeoGebra-Zeichenfeld klicken

Anschließend auf ***Zeichenblatt*** klicken und den Reiter ***Koordinatengitter*** wählen, auf das Farbfeld klicken und ein dunkleres Grau wählen.





3. Parabelscharen

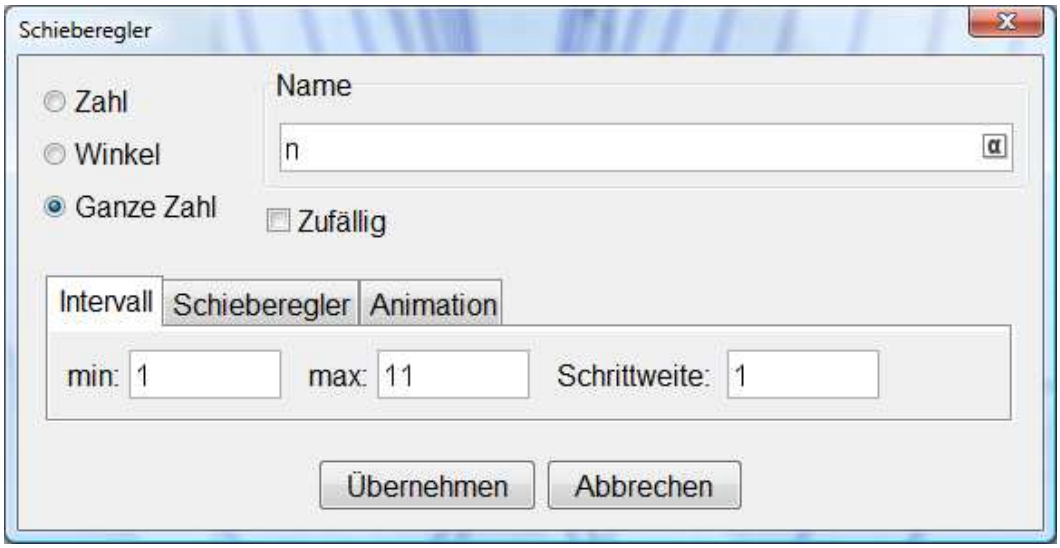
Ausgangspunkt ist die Parabelschar p(b) mit $y = x^2 + bx + b$; $b \in [-3,7]$ mit $\Delta b = 1$;

3.1 Der FOLGE-Befehl

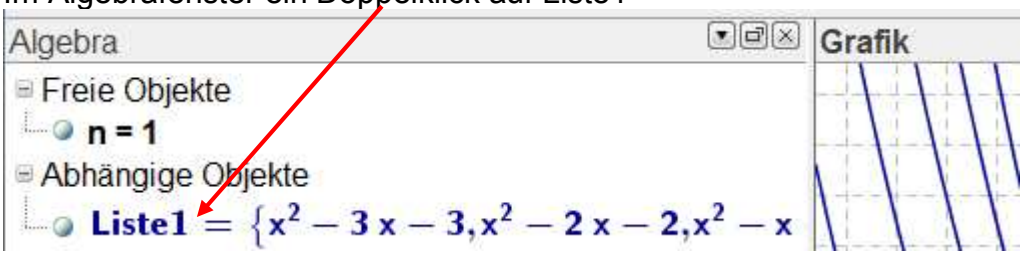
Allgemeine Syntax: ***Folge[<Ausdruck>, <Variable>, <Startwert>, <Endwert>, <Schrittweite>]***

Eingabe: ***Liste1 = Folge[x^2+bx+b , b, -3 , 7 ,1]***
erzeugt die folgende Liste im Algebra-Fenster:
Liste1 = {$x^2 - 3x - 3$, $x^2 - 2x - 2$, $x^2 - x - 1$, $x^2 + 0x$, $x^2 + x + 1$, $x^2 + 2x + 2$, $x^2 + 3x + 3$, $x^2 + 4x + 4$, $x^2 + 5x + 5$, $x^2 + 6x + 6$, $x^2 + 7x + 7$}

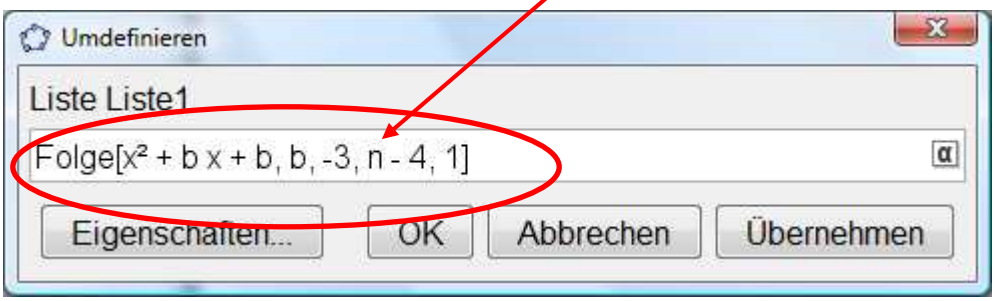
Änderung 1: Die einzelnen Parabeln der Schar sollen nacheinander erscheinen.
Erstellen eines Schiebereglers n der 11 Parabeln erzeugt.



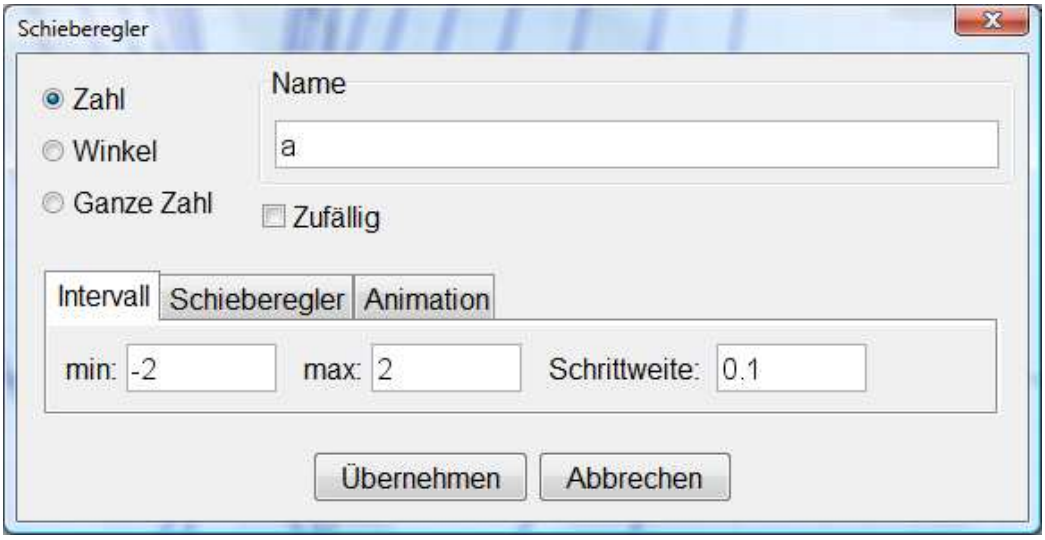
Im Algebrafenster ein Doppelklick auf Liste1



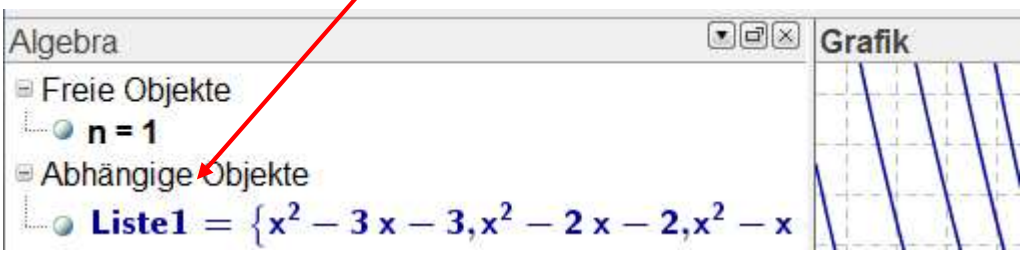
und Liste 1 abändern: Folge[$x^2 + b\,x + b$, b, -3, ***n - 4***, 1]



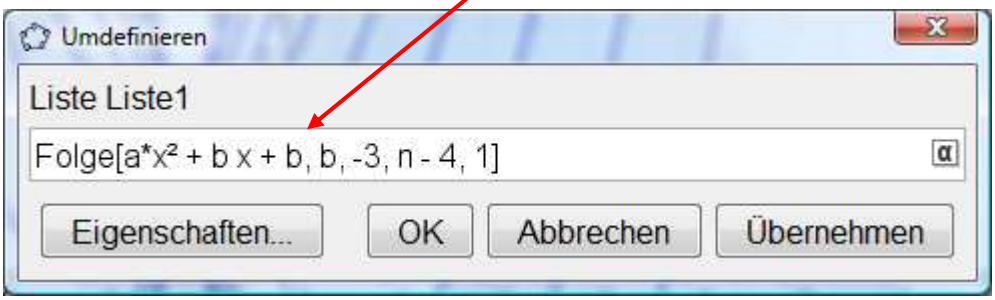
Änderung 2: Es sollen nicht nur Normalparabeln möglich sein.
Erstellen eines Schiebereglers a, der verschiedene Öffnungsfaktoren ermöglicht.



Im Algebrafenster ein Doppelklick auf Liste1



und Liste 1 abändern: Folge[***a****x² + b x + b, b, -3, n - 4, 1]

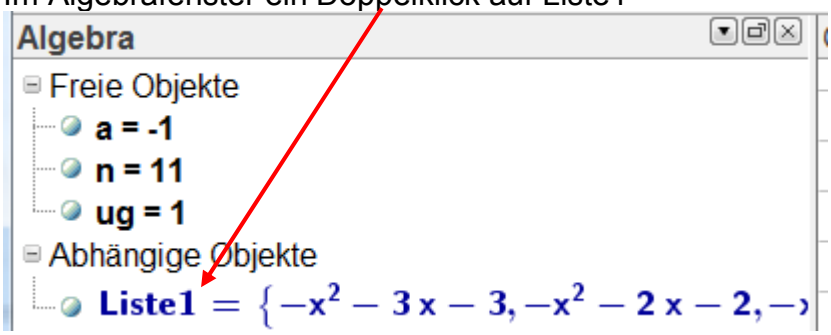


Damit ist es möglich, Parabelscharen p(b) mit $y = ax^2 + bx + b$ zu erzeugen.
Wobei a variabel ist und b der eigentliche Scharparameter.

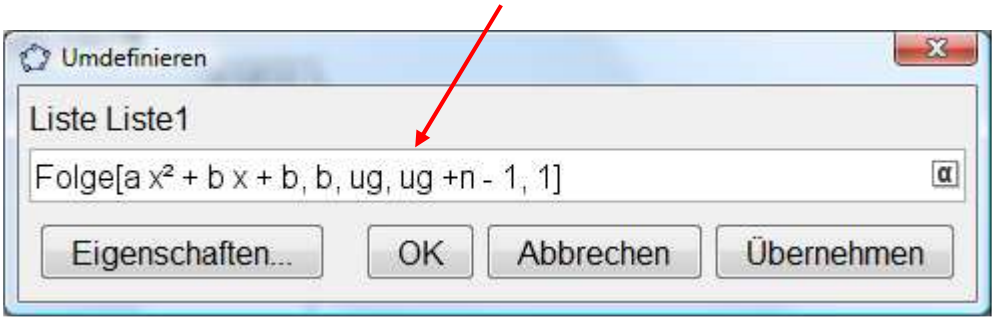
Ändert man den Wert von a = 1 auf a = -1 und beobachtet die Änderung bei den einzelnen Parabeln der Schar, so wird deutlich, dass es sinnvoll sein kann, die untere Grenze „-3“ der Werte b mit $b \in [-3,7]$ mit $\Delta b = 1$ variabel anzulegen.

Erstellen eines Schiebereglers ug der die Untergrenze der Werte für b variabel lässt.

Im Algebrafenster ein Doppelklick auf Liste1



und Liste 1 abändern. Folge[a x² + b x + b, b, ***ug*** , ***ug + n - 1***, 1]



3.2 Trägergraph der Scheitelpunkte (Graph und Gleichung)
3.2.1 Scheitelpunkte der einzelnen Parabeln ermitteln

Nachdem nun alle Parabeln der Schar erzeugt werden können, wäre es interessant, auch die jeweiligen Scheitelpunkte der einzelnen Parabeln der Schar einzuzeichnen.

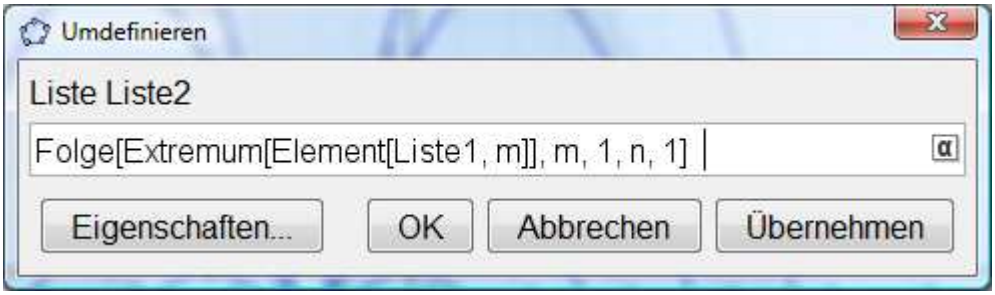
Dazu benötigt man mehrere Schritte in GeoGebra.

Nacheinander soll auf einzelne Gleichungen der Parabeln aus der Schar zugegriffen werden:
Allgemeine Syntax: Element[<Liste>, <Position des Elements>]

Anschließend soll der Scheitelpunkt dieser Parabelgleichungen ermittelt werden.
Allgemeine Syntax: Extremum[<Polynomfunktion>]

In einem dritten Schritt werden nun durch die Verbindung der obigen Befehle und mittels des FOLGE-Befehls alle Scheitelpunkte erzeugt:

Allgemeine Syntax: Folge[Extremum[Element[Liste1, m]], m, 1, n, 1]



Eingabe: ***Liste2 = Folge[Extremum[Element[Liste1, m]], m, 1, n, 1]***

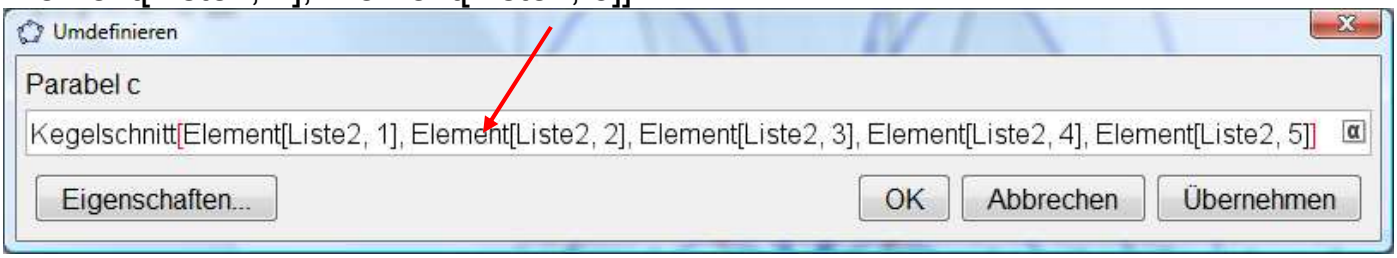
Ausgabe im Algebrafenster:
Liste2 = {(-3.5 | 5.25), (-3 | 3), (-2.5 | 1.25), (-2 | 0), (-1.5 | -0.75), (-1 | -1), (-0.5 | -0.75), (0 | 0), (0.5 | 1.25), (1 | 3), (1.5 | 5.25)}

3.2.2 Trägergraph der einzelnen Scheitelpunkte der Scharparabeln ermitteln

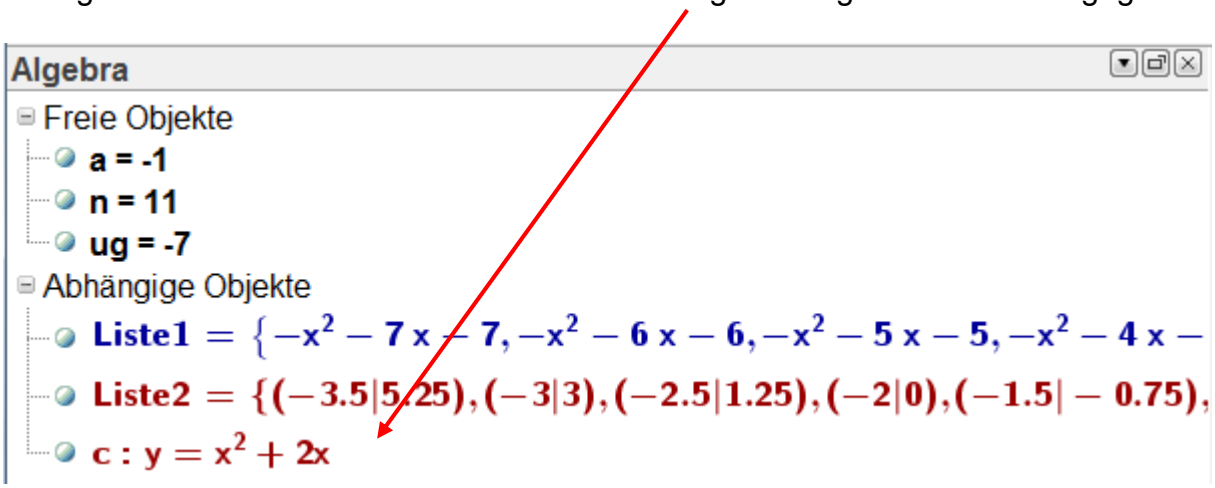
Hierzu kann man den Befehl Kegelschnitt verwenden, der aus fünf vorgegebenen Punkten einen Kegelschnitt (in unserem Fall eine Parabel) erzeugt.
Allgemeine Syntax: Kegelschnitt[<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>, <Punkt>, <Punkt>]

Die einzelnen Punkte können wieder aus der Liste2 ausgelesen werden.

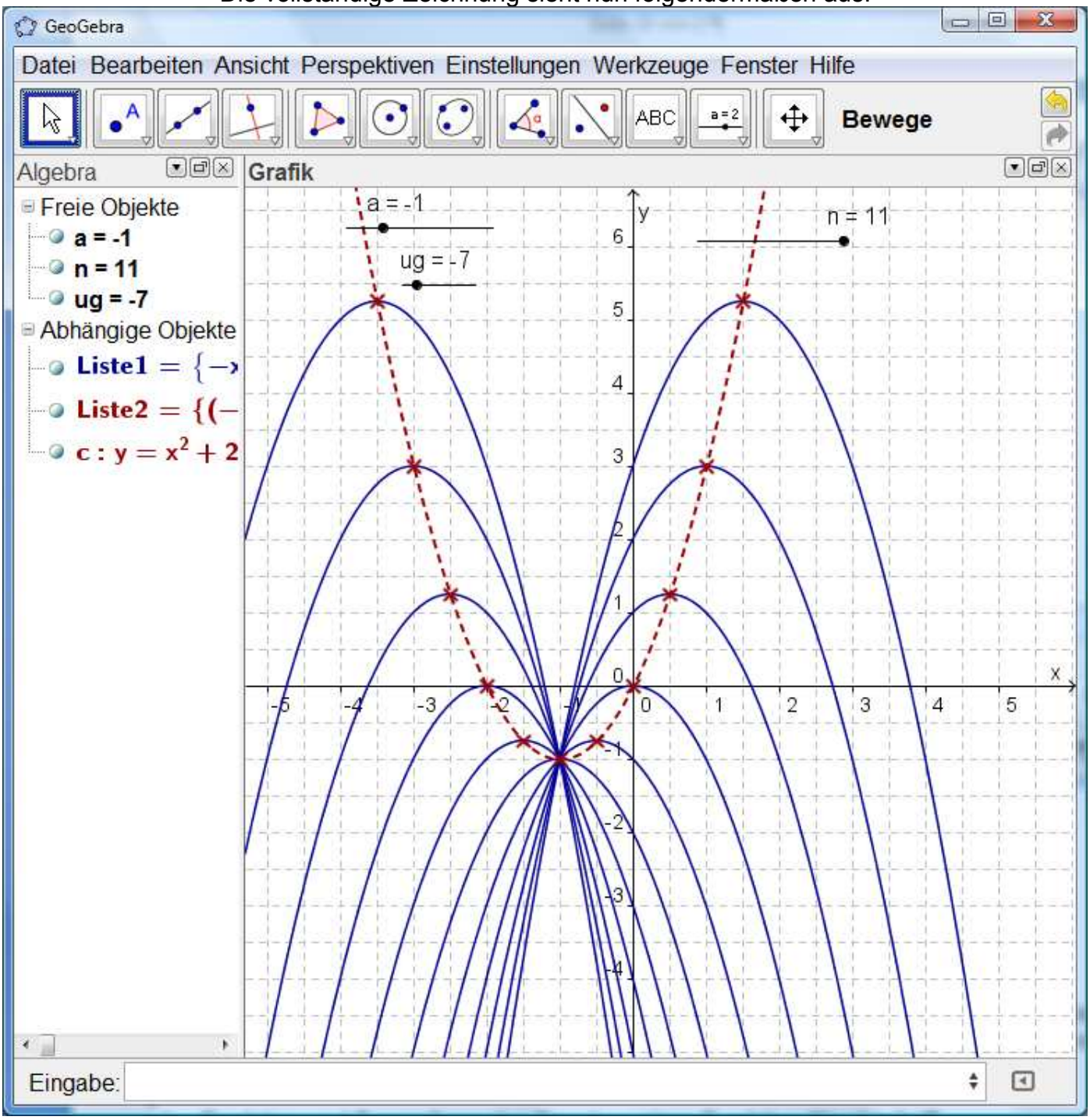
Eingabe: Kegelschnitt[Element[Liste2, 1], Element[Liste2, 2], Element[Liste2, 3], Element[Liste2, 4], Element[Liste2, 5]]



Im Algebrafenster wird anschließend die Gleichung des Kegelschnitts c: ausgegeben.



Die vollständige Zeichnung sieht nun folgendermaßen aus:



Nun kann der Scheitelpunkt des Trägergraphen ermittelt werden.
Hierbei ist zu beachten, dass GeoGebra Funktionen und Kegelschnitte unterschiedlich behandelt. Daher lautet der Befehl zur Ermittlung des Scheitelpunkts diesmal:

Allgemeine Syntax: Scheitel[<Kegelschnitt>]

Eingabe: S = Scheitel[c]

Diese Eingabe erzeugt im Algebrafenster die Darstellung **S(-1 | -1)**

<u>*Hinweis:*</u> Natürlich können nun die wieder die einzelnen Elemente Liste1 und Liste2 als Tabellentext sowie die Gleichung des Trägergraphen der Scheitelpunkte und dessen Scheitelpunkt als Texte ausgegeben werden.

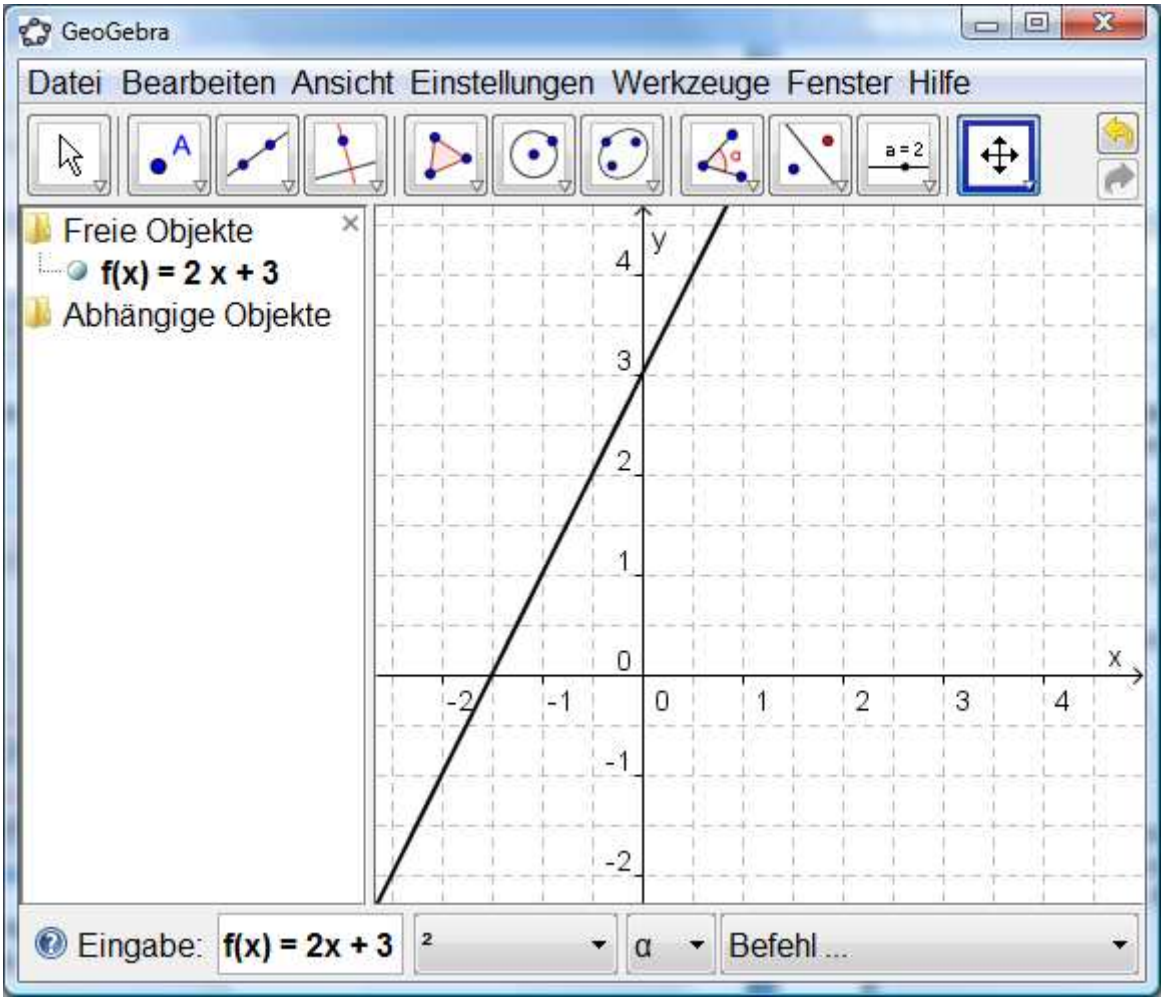
4. Einführung in die Behandlung von Funktionen in GeoGebra

4.1 Lineare Funktion und Graph - Gerade als Objekt

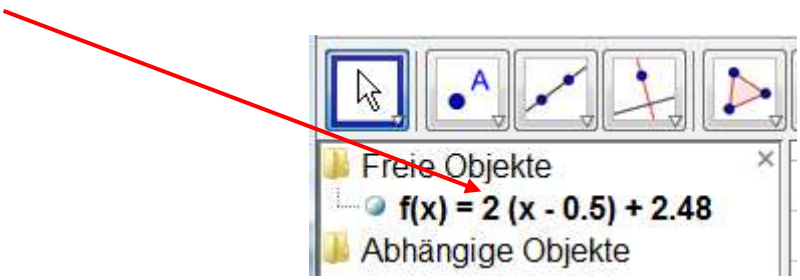
GeoGebra behandelt Graphen von Funktionen und geometrische erzeugte Funktionsgraphen (Geraden oder Kegelschnitte unterschiedlich). Es ist notwendig, diese Unterschiede zu kennen, da sich daraus jeweils Vor- und Nachteile ergeben.

a.) Funktion und Darstellung des Graphen einer Funktion (Nachteile)

Eingabe: ***f(x) = 2x + 3***



Bewegt man nun die Gerade im Zeichenfeld, kann diese parallel verschoben werden. Die Darstellung des Funktionsterms im Algebra-Fenster wechselt dabei von der Normalform in die ***Punkt-Steigungs-Form***.

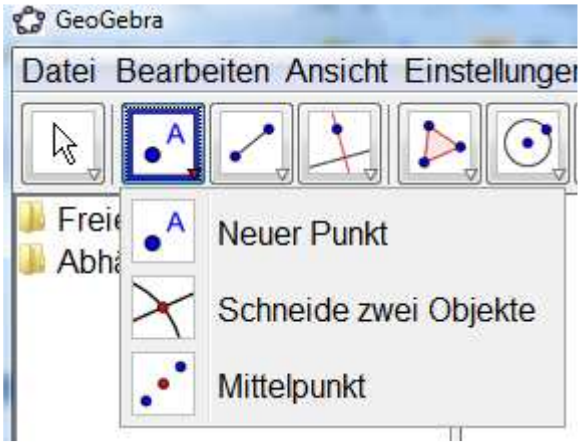


Gravierender Nachteil:
Zu diesem Graphen der Funktion kann z.B. keine Senkrechte gezeichnet werden, da er kein eigentliches Objekt in GeoGebra darstellt.

b.) Funktion und Darstellung des Graphen einer Funktion (Vorteile)

Eingabe: f(x) = 2x + 3

Aufgabenstellung: Auf dem Funktionsgraphen zu f bewegen sich zwei Punkte A und B, wobei die x-Koordinate von B um zwei größer ist als die von A.

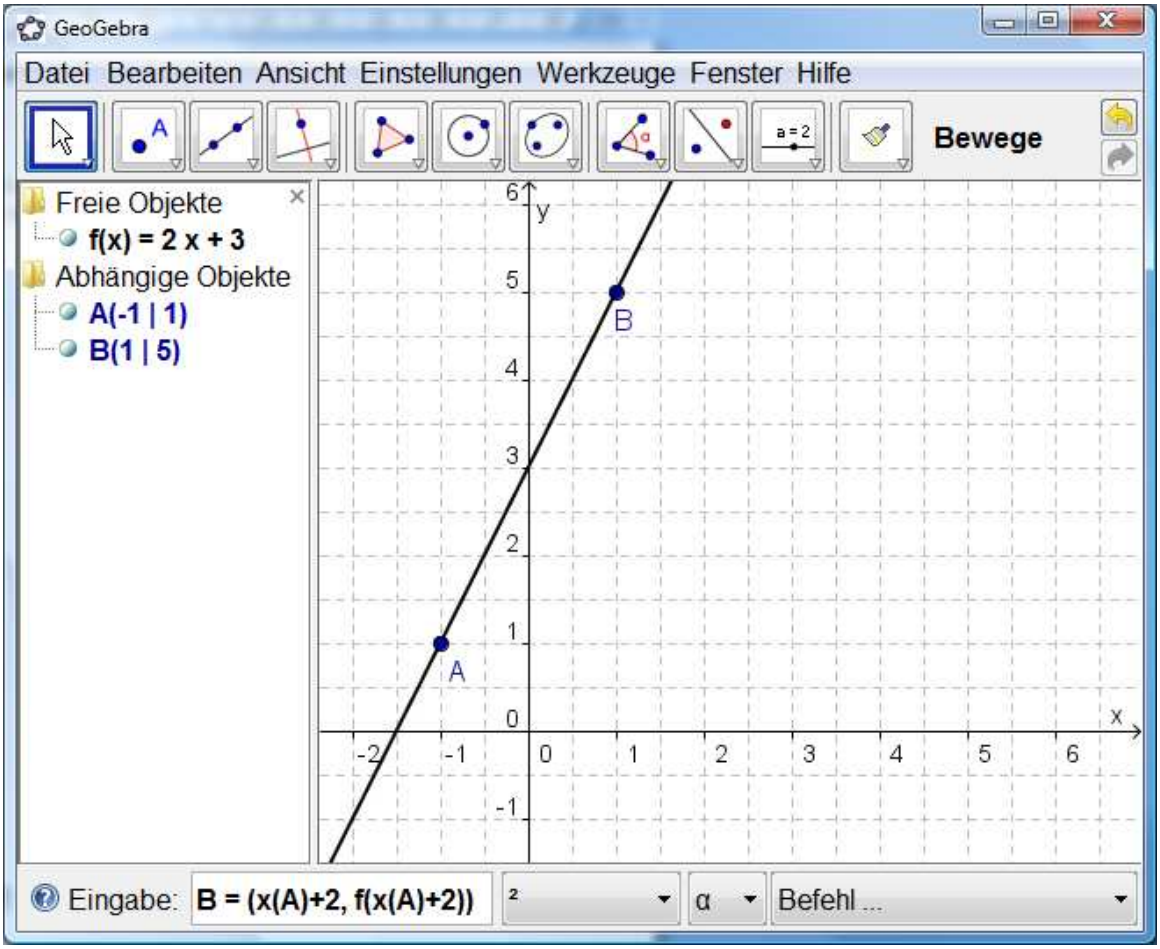


Neuer Punkt wählen

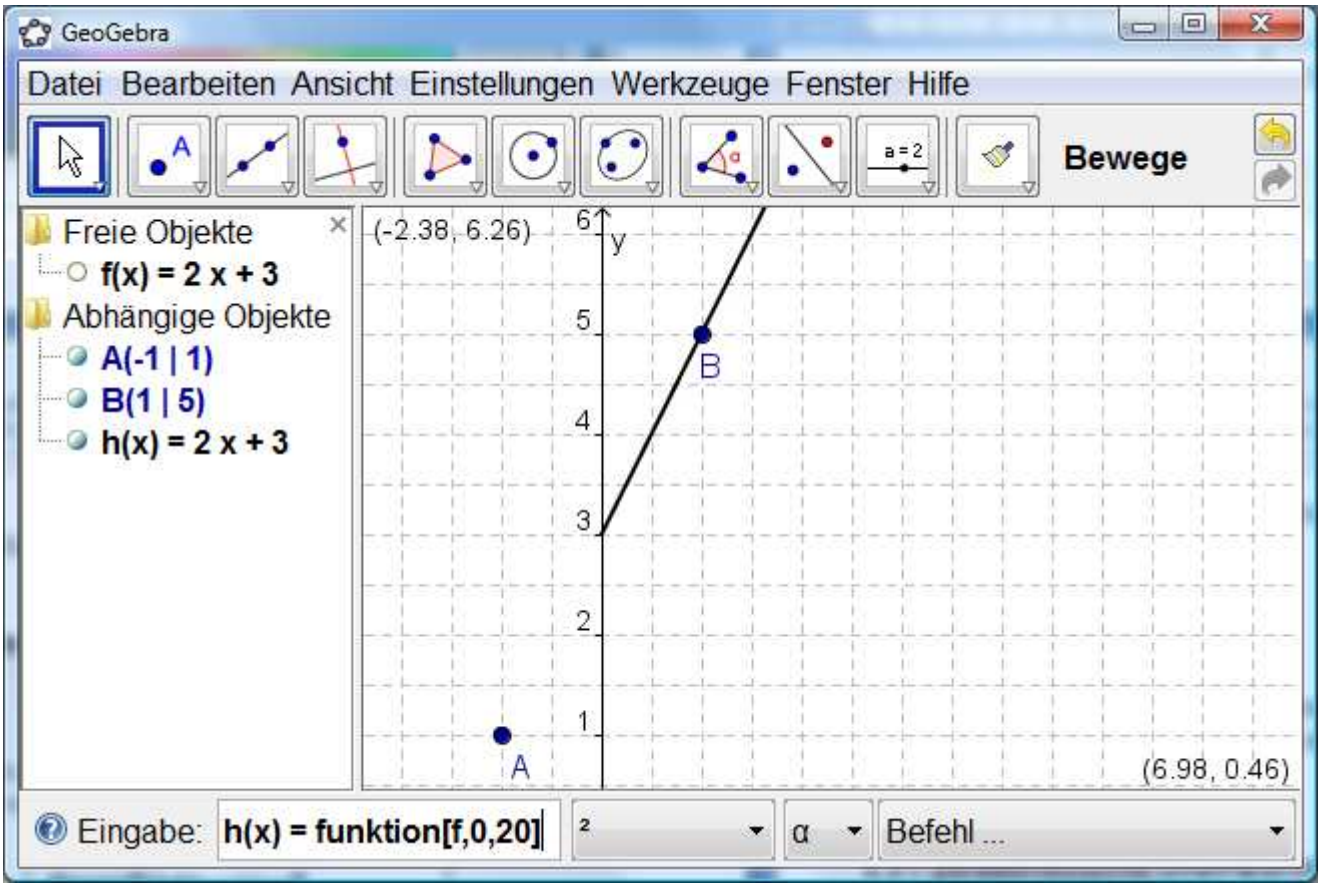
Anschließend auf die „Gerade“ klicken.

Der so erzeugte Punkt A ist dann an die „Gerade“ gebunden, d.h. er kann nur auf dieser „Geraden“ frei bewegt werden.

Eingabe: B = (x(A)+2, f(x(A)+2))



Weiterer Vorteil: Funktionen sind abschnittsweise definierbar
Eingabe: h(x) = Funktion[f,0,10]



Anmerkung:
Bedeutsam ist diese abschnittsweise Definition einer Funktion z.B. bei der Umkehrfunktion zur quadratischen Funktion.

c.) Gerade als Objekt

Eingabe: g: y = 2x + 2 oder alternativ y = 2x + 2

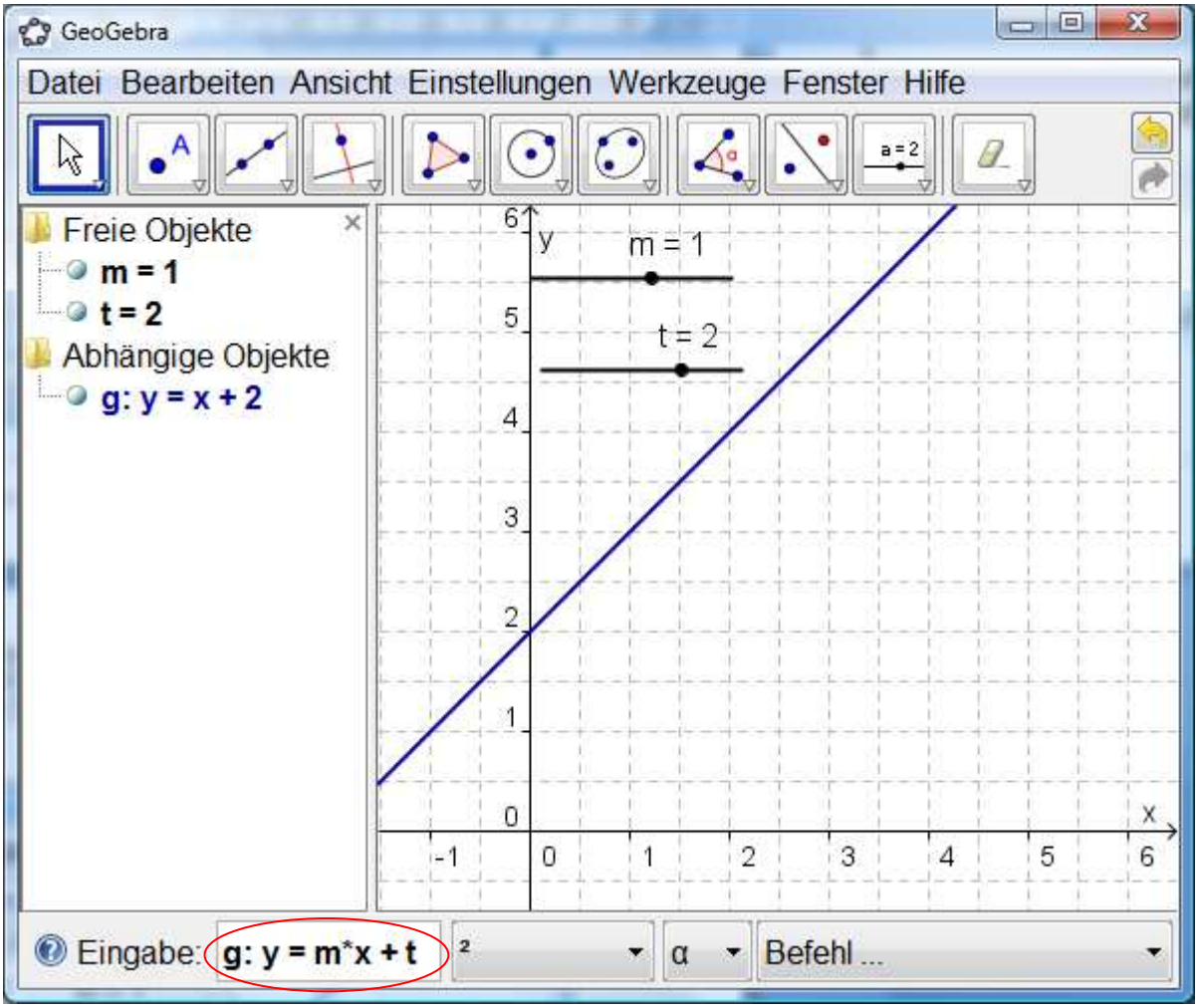
Im Workshop wird anschließend gezeigt, dass ein so erzeugtes Objekt die umgekehrten Vor- und Nachteile besitzt.

4.2 Erzeugen von Geradenbüscheln und Parallelenscharen

Zwei Schieberegler m und t erzeugen

Anschließend die Geradengleichung in der Normalform eingeben.

Eingabe: g: y = m*x + t



Hinweis: In diesem speziellen Fall der Eingabe, muss zwischen m und x ein *-Punkt stehen.

Bewegt man den Schieberegler m, so entstehen unterschiedliche Geraden, die zu einem Geradenbüschel durch (0|2) gehören. Bewegt man t, so entstehen Geraden mit der Steigung m, die zu einer Parallelenschar mit der gemeinsamen Steigung 2 gehören.

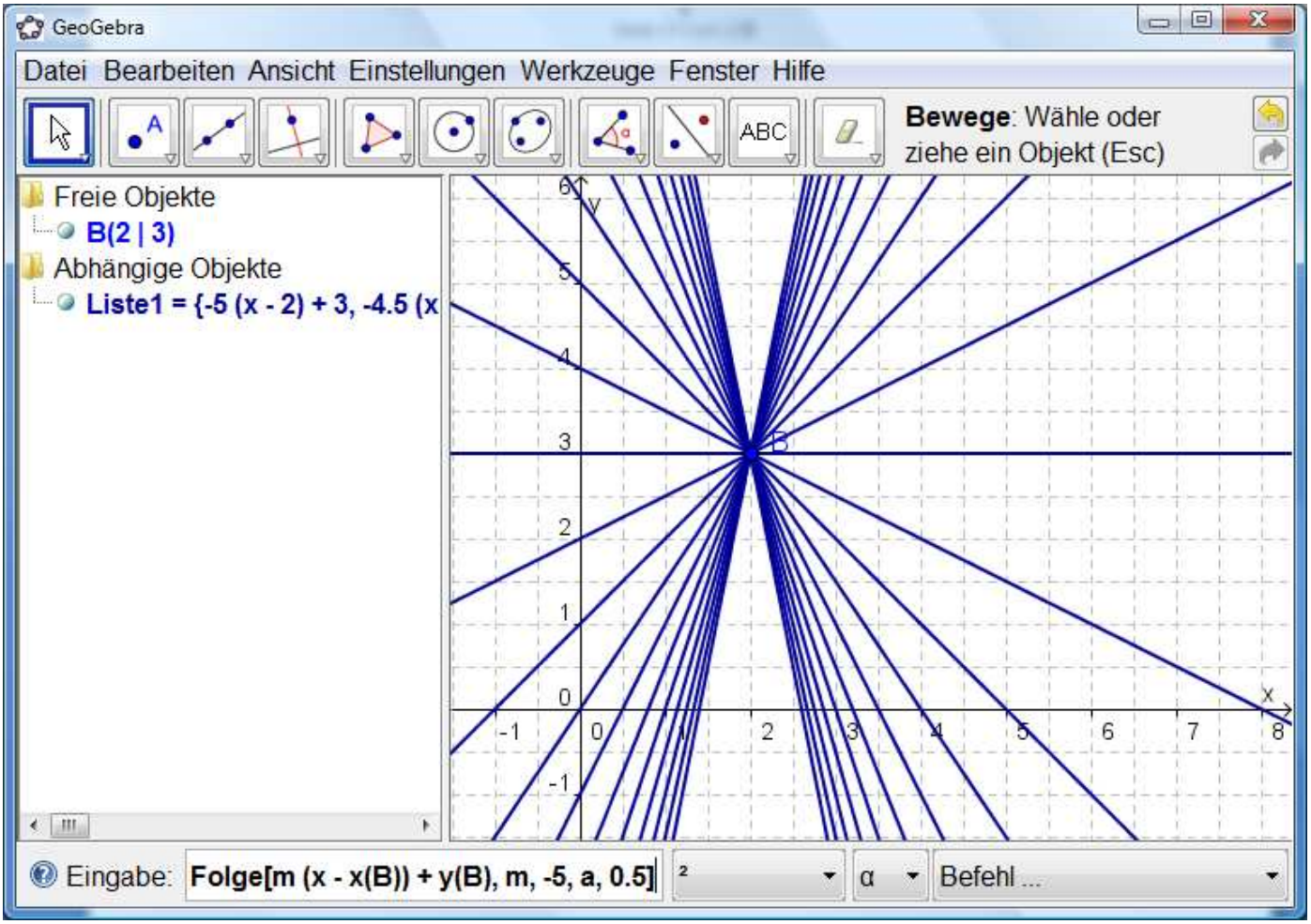
Darüber hinaus ist es möglich beliebige Funktionsscharen zu erzeugen, deren einzelne Elemente auch angezeigt werden. Dazu stellt GeoGebra den Befehl Folge[] zur Verfügung.

Aufgabenstellung:
Zeichne ein Geradenbüschel mit dem Büschelpunkt B(2|3) und $m \in [-5;5]$ und $\Delta m = 0{,}5$.

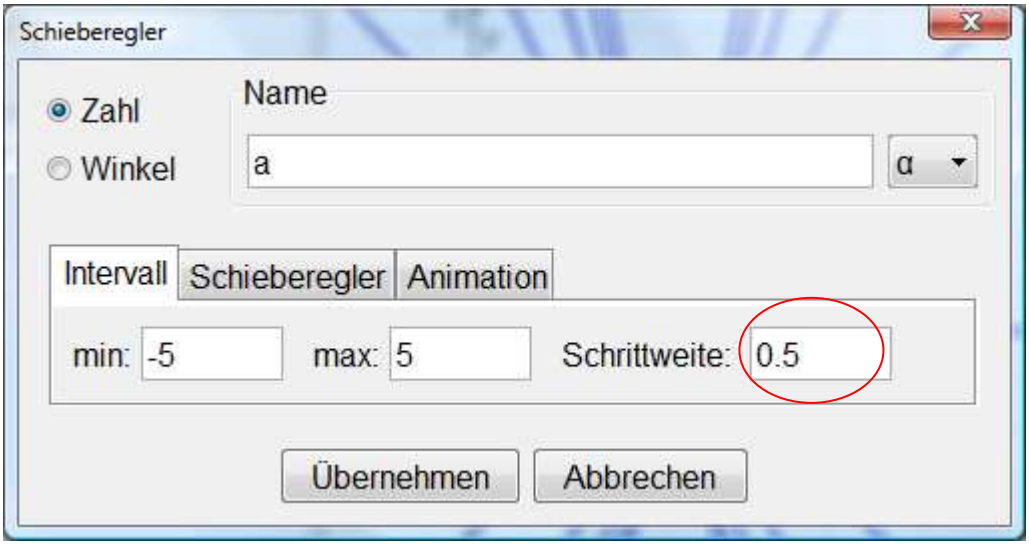
Die Gleichung des Geradenbüschels lautet: $y = m*(x - 2) + 3$
oder allgemein: $y = m*(x - x_B) + y_B$

In GeoGebra wird ausgehend von dieser Gleichung eine Folge erzeugt:

Folge[Term, Parameter, Startwert, Endwert, Schrittweite]
Folge[m*(x - x(B)) + y(B) , m , -5, 5, 0.5]

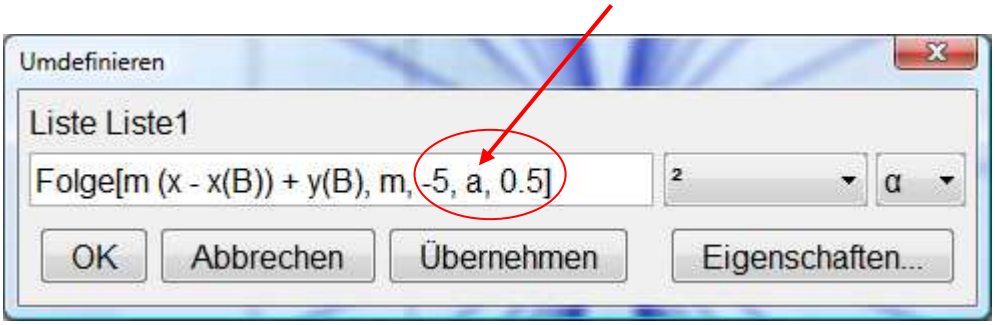


Ferner ist es möglich, die Geraden des Büschels einzeln „entstehen“ zu lassen. Dazu ist es lediglich notwendig, den Endwert variabel als Schieberegler anzulegen.



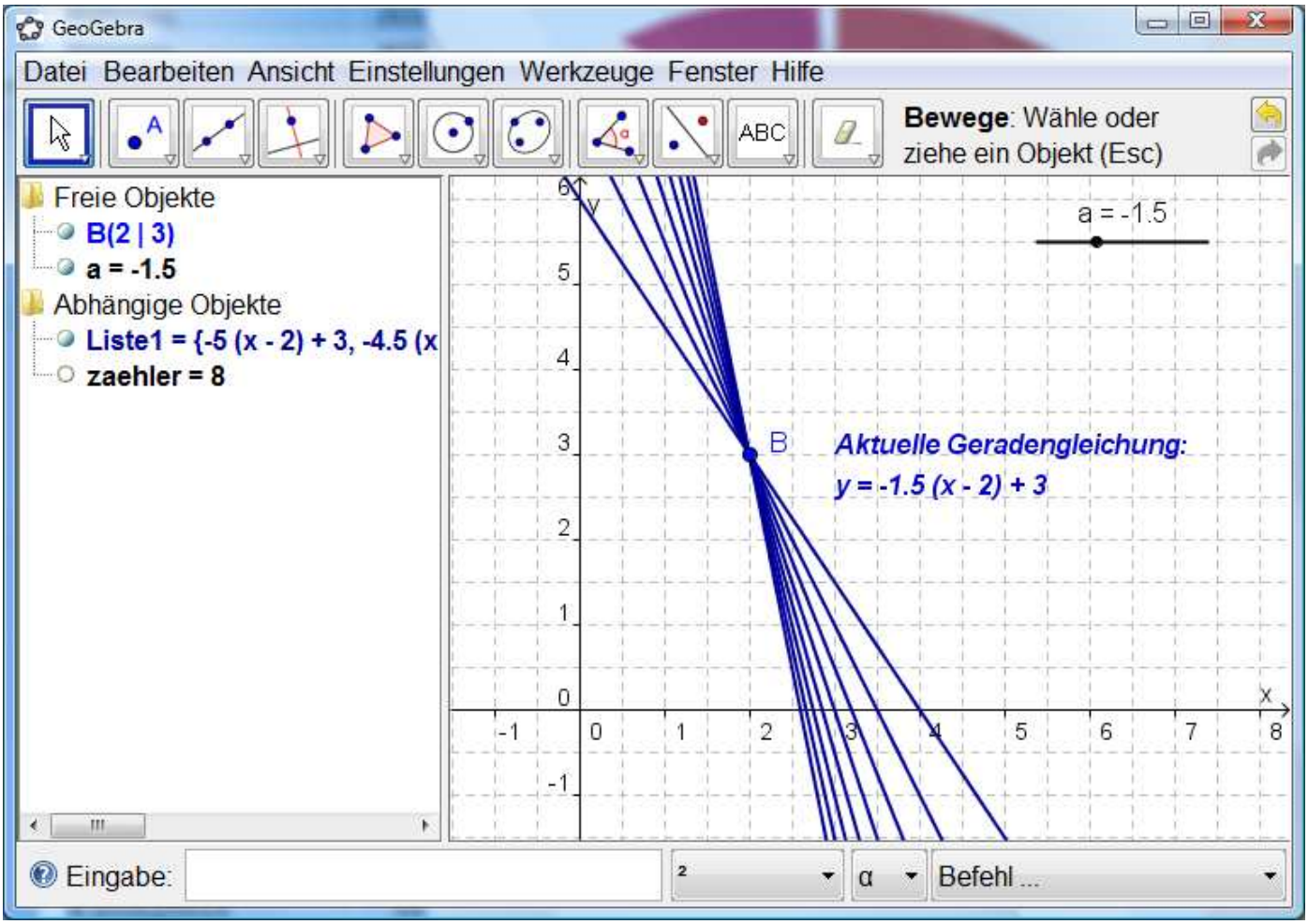
Achtung: Schrittweite auf 0.5 stellen

Abändern des Folgebefehls durch Doppelklick auf ***Liste1*** im Algebra-Fenster.
Dabei wird der bisherige Endwert 5 durch a ersetzt.



Anschließend die Buttons ***Übernehmen*** und ***OK*** betätigen

Bewegt man nun den Schieberegler a von -5 ausgehend, so entstehen die Büschelgeraden der Reihe nach. Es ist sogar möglich, sich die Gleichung der aktuellen Gerade des Büschels anzeigen zu lassen.



<u>*Bemerkung:*</u> Natürlich lassen sich alle am Beispiel der Linearen Funktion aufgezeigten Möglichkeiten auf jede beliebige andere Funktion übertragen.